

Elektrodynamik (Theo C)

M. Vojta, Universität Karlsruhe

Vorlesung WS 2005/06

Einleitung

Gegenstand dieser Vorlesung ist die (klassische) Theorie der elektromagnetischen Felder. Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen (1864)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 ; & \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 ; & \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j} \end{aligned} \quad (\text{Vakuum})$$

für die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ in Abhängigkeit von Ladungs- und Stromverteilung $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$ sollen die physikalischen Erscheinungen abgeleitet werden.

Elektrodynamik ist ein Teil des Standard-Modells der Teilchenphysik, das elementare Teilchen und ihre Wechselwirkungen beschreibt.

Klassische Elektrodynamik ist ein Grenzfall der Quantenelektrodynamik

(gültig für kleine Impuls/Energieüberträge, große Besetzungszahlen von Photonen).

Viele interessante Aspekte von Materie können mit klassischer Theorie nicht gelöst werden, z.B. Warum sind Atome stabil? Warum ist Eisen ferromagnetisch? Warum wird Blei unterhalb 7.2 K supraleitend?

Hier sind Quanteneffekte wichtig (Theorie D, E). Hier werden wir uns auf die elektromagnetischen Aspekte der Theorie beschränken und Eigenschaften von Materie phänomenologisch einordnen.

* Klassische Elektrodynamik ist in Einklang mit der speziellen Relativitätstheorie (Lichtgeschwindigkeit als Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen).

Inhalt

0. Einleitung
1. Mathematische Hilfsmittel
2. Grundbegriffe und Maxwell-Gleichungen
3. Elektrostatik
4. Stationäre Ströme
5. Elektromagnetische Wellen
6. Energie- und Impulstransport des el. mag. Feldes
7. 7. $\leftarrow$ Kräftewirkungen auf Ladungen & Ströme
- 7.8. Felder zeitabhängiger Strom- und Ladungsverteilungen
- 8.9. Elektromagnetische Felder in Substanzen
- 9.10. Quasistationäre Ströme
- 10.11. Dispersion
- 11.12. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik
12. Wellenleiter und Resonatoren
13. Supraleiter

Literatur

J. D. Jackson,

Klassische Elektrodynamik (Gruyter)
Classical Electrodynamics (Wiley)

W. Greiner,

Klassische Elektrodynamik (H. Deutsch)
(Bd 3)

L. D. Landau,
E. M. Lifshitz,

Elektrodynamik der Kontinua (Bd 8) (H. Deutsch)

Klassische Feldtheorie (Bd 2)

T. Feießbach,

Elektrodynamik (Spektrum)

1. Mathematische Hilfsmittel

(Lit: S. Großmann,
Math. Einführungskurs f. d. Physik)

1.1. Skalar- und Vektorfelder

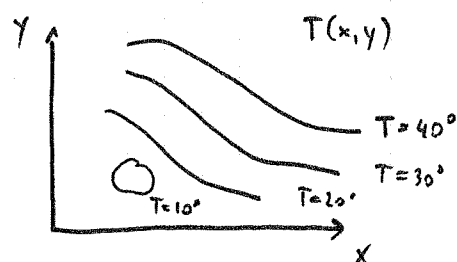
Die Objekte der Maxwell-Gleichungen sind Felder, d.h. Größen, die an jedem Raumpunkt $\vec{r} = (x, y, z)$ einen Wert haben (der zeitabhängig sein kann).

a) Skalare Felder

Jedem Raumpunkt wird eine (reelle) Zahl zugeordnet, d.h. das (reelle) Feld Φ ist $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$.

Bsp: Verteilungen von Temperatur, Druck, Ladung, Energie im Raum.

Bei der Darstellung kann man geometrische Orte mit $\Phi(\vec{r}) = \text{const}$ betrachten; in 2d sind dies Linien (z.B. Höhenlinien auf der Landkarte), in 3d Flächen (z.B. Äquipotentialflächen)



Isothermen (≙ „Höhenlinien“) in 2d

b) Vektorfelder

Jedem Raumpunkt wird ein Vektor $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ zugeordnet.

Bsp: Geschwindigkeitsverteilung in einem strömenden Gas,

Wärmestromdichte in strömendem Medium (Energie pro Zeit und Fläche in Richtung der Strömung),

Lokale Geschwindigkeit eines Massenelements in einem rotierenden Körper ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$)

Vektorfelder lassen sich durch Feldlinien veranschaulichen, anschaulich folgen die Feldlinien der lokalen Richtung des Feldes.

Feldlinien lassen sich durch Parameterdarstellung $\vec{r}(\tau, c)$ definieren ($\tau \hat{=}$ Kurvenparameter, c unterscheidet Feldlinien). Dann

$$- \frac{d}{d\tau} \vec{r}(\tau, c) = \vec{E}(\vec{r}(\tau, c))$$

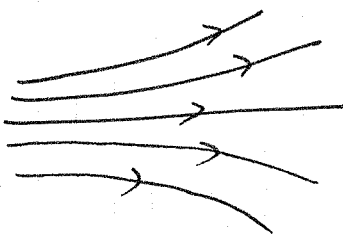
- Durch jeden Punkt mit $\vec{E} \neq 0$ geht eine Feldlinie. (Ausnahmen: $|\vec{E}|=0$ und $|\vec{E}| \rightarrow \infty$)

Damit liegen Feldlinien unendlich dicht. Deshalb ist folgende

Konvention günstig:

- Die Dichte der Feldlinien (d.h. Zahl der Linien pro Flächeneinheit senkrecht zur Linie) ist proportional zur Feldstärke.

(Dann können Linien entstehen oder enden.)



1.2. Integrale auf Feldern

Integrale über skalare Felder werden wie bekannt gebildet;

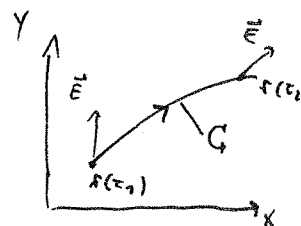
bei Integralen über Vektorfelder spielt die Richtungsinformation eine entscheidende Rolle. Man unterscheidet je nach Dimension des Integrationsgebietes Linien-, Flächen- und Volumenintegrale.

a) Linienintegral

$$\gamma = \int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{E}(\vec{r}(\tau)) \frac{d\vec{r}}{d\tau} d\tau$$

Die Kurve C ist dabei in Parameterdarstellung (mit Richtung!)

$\vec{r} = \vec{r}(\tau)$ gegeben. Spezialfall: geschlossene Kurve $\curvearrowright$



Ringintegral
(Zirkulation)

$$\Gamma = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Bsp Potentielle Energie einer Punktladung:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (\text{für konservative Kräfte})$$

$$= - \int_{r_0}^r E \cdot dr'$$

b) Flächenintegral

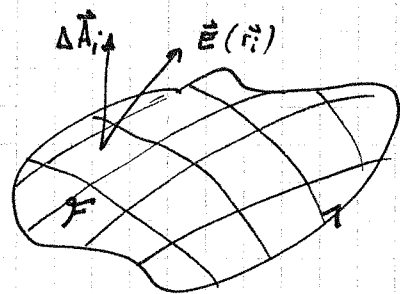
$$\Phi = \iint_F \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_{B(u,v)} \vec{E}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

Φ heißt auch Fluß des Feldes $\vec{E}$ durch die Fläche F (und misst, wieviele Feldlinien von $\vec{E}$ durch F gehen). $d\vec{A}$ ist ein Flächenelement und zeigt in Richtung des lokalen Flächennormalen von F . (Die Richtung von $d\vec{A}$ wird so ^{meist} gewählt, daß bei geschlossenen Flächen $d\vec{A}$ nach außen zeigt, bei Flächen mit orientierter Randkurve diese von der $d\vec{A}$ -Spitze aus gesehen im mathematisch positiven Drehsinn durchlaufen wird.) [Rechte Hand]

Φ läßt sich schreiben als

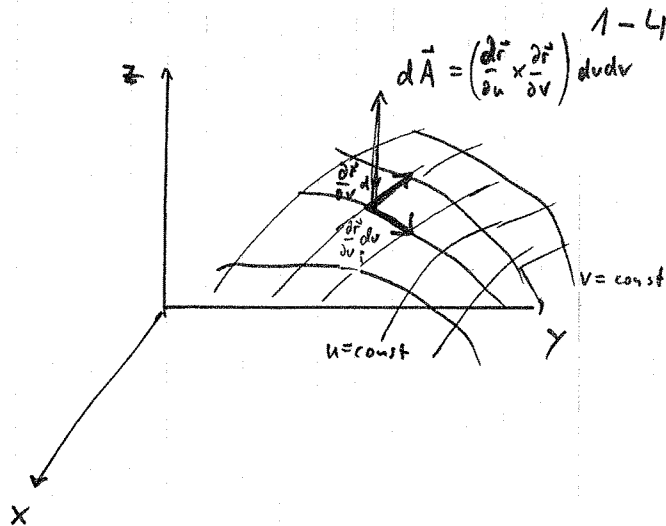
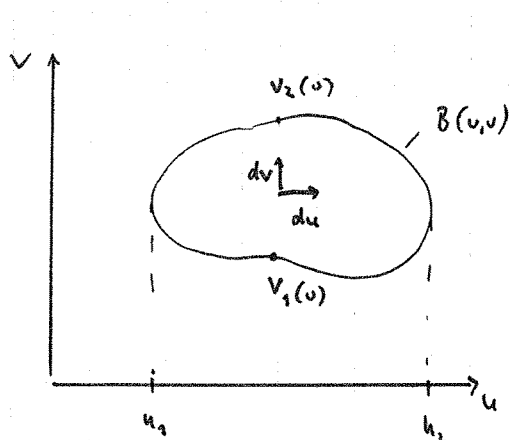
$$\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{A}_i$$

wobei das Limit einer Verfeinerung des Rasternetzes auf F entspricht.



Zur Berechnung benutzt man wiederum eine Parameterdarstellung, $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, der Fläche F . Eine begrenzte Fläche entspricht dabei einem Gebiet B in der $u-v$ -Ebene. Die Linien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ bilden i.a. ein krummliniges, schiefwinkliges Netz im $\vec{r}$ -Raum. Der Inhalt eines Flächenelements ist

$$d\vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$



Das u - v -Integral wird wie üblich als iteriertes Integral berechnet:

$$\iint_{B(u,v)} f(u,v) du dv = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} dv f(u,v)$$

u_1, u_2, v_1, v_2 folgen aus der Landkurve des Bereichs $B(u,v)$.

c) Volumenintegral eines skalaren Feldes

$$\iiint_V dV \Phi(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \Phi(x,y,z)$$

Mit einer Parameterdarstellung von

$V, \vec{r} = \vec{r}(u,v,w)$ gilt:

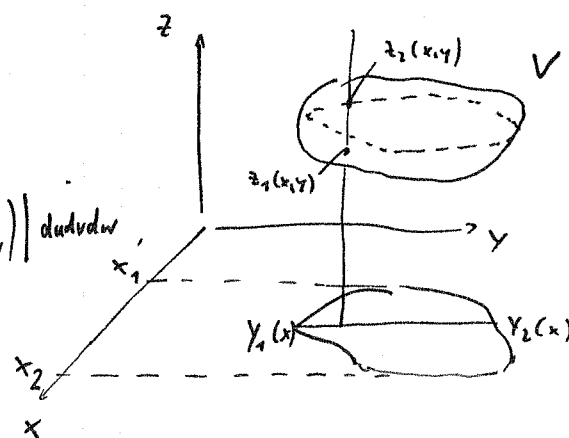
$$\iiint_V dV \Phi(\vec{r}) = \iiint_{\tilde{V}} \Phi(\vec{r}(u,v,w)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right| du dv dw$$

wobei $\tilde{V}$ der Volumenelement im uvw -Raum ist, das auf V abgebildet wird.

Das Skalarprodukt

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

heißt Funktional-
determinante (oder
Jacobi-Determinante).



26.11.

1.3. Vektorielle Ableitungen und Integralsätze

a) Gradient - Richtungsableitung eines Skalarfeldes

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) =: \vec{\nabla} \varphi$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Nabla-Operator

grad φ ist ein Vektor (links Koord. Info).

grad φ beschreibt Änderung von φ entlang einer Richtung im Raum:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) &= \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z + \dots \\ &= \varphi(\vec{r}) + \Delta \vec{r} \cdot \text{grad } \varphi \end{aligned}$$

Ein Gradientenfeld $\vec{A} = \text{grad } \varphi$ hat die Eigenschaft

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0,$$

denn

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint \text{grad } \varphi \cdot d\vec{r} = \oint d\varphi = 0.$$

Umgekehrt: Falls $\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$, dann ist $\vec{A}$ als Gradientenfeld darstellbar, $\vec{A} = \text{grad } \varphi$, mit

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (\vec{r}_0 \text{ beliebig bemessen})$$

grad φ gibt Richtung der stärksten Änderung von φ an, d.h.

grad φ steht senkrecht auf Flächen mit $\varphi = \text{const.}$

Bsp

$$\text{grad } |\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\text{grad } \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

6) Divergenz - Quellstärke eines Vektorfeldes

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$\operatorname{div} \vec{B}$ ist ein Skalar, d.h. invariant unter Koordinatentransformationen;

diese Eigenschaft ist eine des Skalarprodukts $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$.

div kann als lokale Quellstärke eines Vektorfeldes interpretiert werden.

Sei $\vec{j}$ eine Stromdichte (von Teilchen mit Geschwindigkeit $\vec{v}$; $\vec{j} = n \vec{v}$).

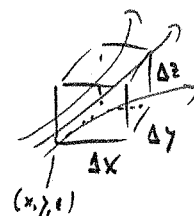
Die Anzahl der Teilchen, die aus einem

Volumenelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ herausströmen,

ist:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \Delta V} \vec{j} \cdot d\vec{A} &= \Delta y \Delta z (j_x(x+\Delta x, y, z) - j_x(x, y, z)) \\ &\quad + \Delta x \Delta z (j_y(x, y+\Delta y, z) - j_y(x, y, z)) \\ &\quad + \Delta x \Delta y (j_z(x, y, z+\Delta z) - j_z(x, y, z)) \\ &= \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Strom oder Fluß
durch Flächenelement $d\vec{A}$



➔ Aus Volumen ΔV fließt ein Teilchenstrom der Stärke $\Delta V \operatorname{div} \vec{j}$ heraus.

Häufig benötigt man $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = \Delta \varphi$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})$$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

Laplace-Operator

Bsp: $\operatorname{div} \vec{r} = 3$

$$\operatorname{div} (\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

$$(\text{Leichter: } \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \varphi)$$

c) Rotation — Wirbelstärke eines Vektorfeldes

1-7

$$\text{rot } \vec{B} = (\partial_y B_z - \partial_z B_y) \hat{e}_x + (\partial_z B_x - \partial_x B_z) \hat{e}_y + (\partial_x B_y - \partial_y B_x) \hat{e}_z = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$\text{rot } \vec{B}$ ist ein Vektor (unter Koordinatentransformationen).

Man kann auch schreiben: $(\text{rot } \vec{B})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j B_k$ (ϵ = antisymmetrischer Tensor)

oder

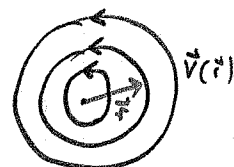
$$\text{rot } \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

rot kann als lokale Wirbelstärke eines Vektorfeldes interpretiert werden.

Betrachten wir konkret ein Strömungsfeld mit einem

Wirbel. Wenn $\vec{\omega} \parallel \hat{e}_z$ die Drehung charakterisiert

(ω = Kreisfrequenz), dann ist $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



das Geschwindigkeitsfeld des Wirbels.

$$\text{Hier ist } \text{rot } \vec{v} = \text{rot } (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \hat{e}_x (\partial_y (\omega_x y - \omega_y x) - \partial_z (\omega_z x - \omega_x z)) + \dots = 2 \vec{\omega} \quad (\vec{\omega} \text{ charakterisiert Wirbelstärke})$$

$\text{rot } \vec{B}$ nennt man das Wirbelfeld von $\vec{B}$.

(Achtung: Leitet man $\vec{r}$ ab, so erhält man $\vec{v}$.)

(Achtung: Leitet man $\vec{r}$ ab, so erhält man $\vec{v}$. Ist $\text{rot } \vec{B} \neq 0$ nur im Wirbel, wo das Feld nicht 0 ist.)

Bsp

$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

$$\text{rot } (\varphi \vec{A}) = \varphi \text{rot } \vec{A} + (\text{grad } \varphi) \times \vec{A}$$

$$\boxed{\text{rot } (\text{grad } \varphi) = 0}$$

(φ zweimal stetig diff. bar)

$$\boxed{\text{div } (\text{rot } \vec{A}) = 0}$$

($\vec{A}$ 1-1)

(Nachrechnen! Plausibel: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi : \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ div.}$)

Umgekehrt: Wenn $\text{div } \vec{B} = 0$, dann ist $\vec{B}$ als Wirbelfeld

darstellbar, $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. In $\vec{A}$ ist additives Gradientenfeld frei.

d) Gaußscher Satz

$$\boxed{\int_V dV \operatorname{div} \vec{B} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{B}} \quad \text{Gauß}$$

Verknüpft Eigenschaften von $\vec{B}$ im Inneren von V mit denen auf der Oberfläche ∂V .

Beweis: durch Zerlegen in Teilvolumina. Siehe b), dort für Quader:

$$\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{B} = \Delta V \cdot \operatorname{div} \vec{B}.$$

Setzt man $\vec{B} = \vec{a} \varphi(\vec{r})$, erhält man den Gaußschen Satz für skalare Felder

$$\int_V dV \operatorname{grad} \varphi = \oint_{\partial V} d\vec{A} \varphi$$

oder

$$\int_V dV \vec{\nabla} \dots = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \dots$$

← $\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \vec{a} \times \vec{c}(\vec{r}) \text{ gilt} \\ \int_V dV \operatorname{rot} \vec{c} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{c} \end{array} \right.$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes kann man in drei Dimensionen partiell integrieren: $\int dV \psi \operatorname{grad} \varphi = ?$

$$\begin{aligned} \int_V dV \psi \operatorname{grad} \varphi &= \int_V dV [\operatorname{grad} (\psi \varphi) - \varphi \operatorname{grad} \psi] \\ &= \oint_{\partial V} d\vec{A} \psi \varphi - \int_V dV \varphi \operatorname{grad} \psi \end{aligned}$$

(!) Falls die Randwerte Null sind (z.B. ψ oder φ Null auf ∂V), dann folgt:

$$\int_V dV \psi \operatorname{grad} \varphi = - \int_V dV \varphi \operatorname{grad} \psi$$

Partielle Integration von $\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi$ führt auf:

$$\int_V dV (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \oint_{\partial V} d\vec{A} (\varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi)$$

Green'scher Satz

e) Stokesscher Satz

$$\boxed{\iint_A d\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{B}}$$

Stokes

Beweis: durch Zerlegen in Teilflächen. Für ^{ein} flächenelement $\Delta \vec{A}$ gilt:

$$\oint_{\partial \Delta A} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \Delta \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} \quad \text{denn}$$

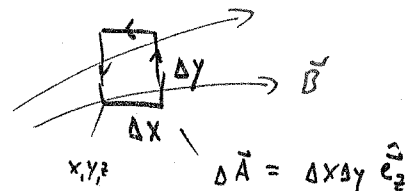
$$\oint_{\partial \Delta A} d\vec{r} \cdot \vec{B} = B_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \Delta x + B_y(x+\Delta x, \bar{y}, \bar{z}) \Delta y$$

↑
Mittelwertsatz

$$- B_x(\bar{x}, \bar{y} + \Delta y, \bar{z}) \Delta x - B_y(x, \bar{y}, \bar{z}) \Delta y$$

$$= -\Delta x \Delta y \frac{\partial B_x}{\partial y} + \Delta y \Delta x \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$= \Delta x \Delta y (\operatorname{rot} \vec{B})_z = \Delta \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} //$$



Wenn man Stokes auf geschlossene Fläche anwendet, folgt $\oint d\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = 0$.

Setzt man $\vec{B} = \vec{a} \varphi(\vec{r})$, erhält man

$$\iint_A d\vec{A} \times \operatorname{grad} \varphi = \oint_{\partial A} d\vec{r} \varphi$$

Analog ergibt sich mit $\vec{B} = \vec{a} \times \vec{c}(\vec{r})$

$$\iint_A (d\vec{A} \times \vec{c}) \times \vec{c} = \oint_{\partial A} d\vec{r} \times \vec{c}$$

oder allg

$$\iint_A (d\vec{A} \times \vec{v}) \dots = \oint_{\partial A} d\vec{r} \dots$$

↓ 28.10.

1.4. Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Kartesisches / Kugel- / Zylinderkoordinaten wichtig.

Wdh. siehe Gropmann-Buch.

Achtung z.B.

$$\vec{\nabla} \varphi = \partial_x \varphi \hat{e}_x + \partial_y \varphi \hat{e}_y + \partial_z \varphi \hat{e}_z$$

Kartesisch

$$\vec{\nabla} \varphi = \partial_r \varphi \hat{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \varphi \hat{e}_\varphi$$

Kugelh.

u.s.w.

Generell:

$$\Delta \varphi =: \text{grad } \varphi \cdot \Delta \vec{r}$$

$$(\vec{\nabla} \varphi)_n = \vec{\nabla} \varphi \cdot \hat{e}_n = \frac{1}{g_n} \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$g_n = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|$$

$$\left(= \frac{1}{g_n} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \vec{\nabla} \varphi \right)$$

$$\text{div } \vec{B} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial \Delta V} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$(\text{rot } \vec{B})_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_{\partial \Delta A} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$



Flächennormale

2. Grundbegriffe und Maxwell-Gleichungen

2.1. Kräfte auf Punktladungen

Ruhende Ladung

$$\vec{F}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{Erfahrung}}{=} Q \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
 Körp- Elektr. Feld
 eigenschaft unabh. vom Körper

Vergleich der Kraft auf 2 Körper: $\vec{F}_1(\vec{r}, t) = Q_1/Q_2 \vec{F}_2(\vec{r}, t)$

Damit ist Bezugsladung (d.h. Ladungseinheit) noch frei,

z.B. kann man undefinieren $\tilde{Q} = \gamma Q$, $\tilde{\vec{E}} = 1/\gamma \vec{E}$, $\tilde{Q}_1/\tilde{Q}_2 = Q_1/Q_2$.
 (Einheitenfestlegung später)

Bewegte Ladung

$$\vec{F}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{Erfahrung}}{=} Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$\nearrow$
 Dies definiert $\vec{B}$!

2.2. Ladungs- und Stromdichte; Ladungserhaltung

Ladung im Volumenelement dV : $dQ = \rho(\vec{r}, t) dV$

$\leadsto$ Ladungsdichte

$$\underline{\rho(\vec{r}, t) = \frac{dQ}{dV}}$$

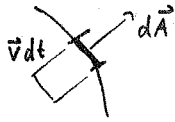
Ladungsänderung in V :
 (V fest)

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt} \int_V dV \rho(\vec{r}, t) = \int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Erfahrung: Ladung erhalten, d.h. Ladungsänderung durch Strom $\text{in/aus } V$.

$$\underline{\dot{Q} = -\dot{I}} \quad (\dot{I} \text{ nach außen sei positiv})$$

Strom fließt durch Oberflächenelement $d\vec{A}$ in Zeitintervall dt :



$$dQ = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) dt d\vec{A}$$

↑
Geschwindigkeitsfeld

$$\leadsto \frac{dQ}{dt} = \rho \vec{v} d\vec{A} =: \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}$$

~ Stromdichte $\vec{j} = \rho \vec{v}$ (Mehrere Ladungsorten $\vec{j} = \sum_n \rho_n \vec{v}_n$)

Stromdichte ist Strom/Fläche, also $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{A}$

für geschlossenes Volumen $I = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A}$

~ Einsetzen in Ladungserhaltung

$$0 = \dot{Q} + I = \underbrace{\iiint dV \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Gauß}} + \oint \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

$$\iiint dV \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial \vec{r}} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{für alle } V)$$

~ Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial \vec{r}} = 0} \quad (\vec{j} + \text{div} \vec{j} = 0)$$

Für (unendlich) großes Volumen:

$$\vec{j} \rightarrow 0 \text{ auf Oberfläche} \leadsto \dot{Q} = - \oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0 \leadsto Q = \text{const}$$

Lorentz-

Kraftdichte:

$$\vec{f} = d\vec{F}/dV$$

$$d\vec{F} = dQ (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{j} = \rho(\vec{r}, t) (\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

(Mehrere Ladungsorten: $\vec{j} = \sum_n \rho_n (\vec{E} + \vec{v}_n \times \vec{B})$)

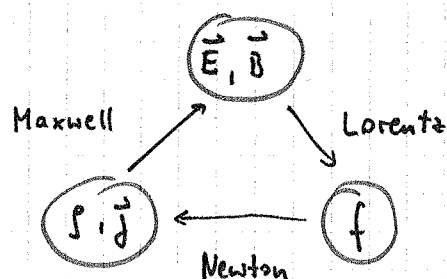
2.3. Die Maxwell-Gleichungen

bis jetzt:

$$\vec{E}, \vec{B} \longrightarrow \vec{f}$$

nun:

$$\rho, \vec{j} \longrightarrow \vec{E}, \vec{B}$$



Frage: Braucht man $\vec{E}$ & $\vec{B}$ wirklich oder könnte man die Felder eliminieren?

(„Fernwirkungstheorie“)

Antwort: Eliminieren wäre unzuwidermäßig.

$\vec{E}$ & $\vec{B}$ können selbständig im Vak. existieren (Wellen)

lokale Theorien sind einfacher

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0, & \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} &= \vec{j} \end{aligned}$$

Quellen und Wirbel von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch ρ und $\vec{j}$ bestimmt.

(Gleichungen gelten für makroskopische Felder im Vakuum, mikroskopisch allgemein ohne Einschränkung!)

Die Maxwell-Gl. beinhalten die Kontinuitätsgl. → Übung!

2.4. Konstruktion der Maxwell-Gleichungen aus Symmetrieforderungen

Symmetrien: $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ Rauminversion
 $t \rightarrow -t$ Reversibilität } keine Änderung der physikalischen Gesetze

Ziel: möglichste einfache Gesetze → lineare Gl., Dgl. 1. Ordnung

Symmetrie transformation sollte Form der Gleichungen invariant lassen, d.h.

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A' \\ B &\rightarrow B' \end{aligned}$$

$$A = B \longrightarrow A' = B'$$

(z.B. bei Drehung von Vektoren)

	$t \rightarrow -t$	$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$	
$t, \partial/\partial t$	-	+	} Def
$\vec{r}, \partial/\partial \vec{r}$	+	-	
$\vec{r}^2$	-	-	
$\vec{r}, \vec{F}, \vec{p}$	+	-	Erfahrung aus Mechanik $\vec{r}^i = \vec{r}^i$
Q, ρ	+	+	Annahme
$\vec{j} = \rho \vec{v}$	-	-	
$\vec{E}$	+	-	Vektor $\vec{F} = Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
$\vec{B}$	-	+	Pseudo vektor
$\partial \vec{E} / \partial \vec{r}$	+	+	Skalar
$\partial \vec{B} / \partial \vec{r}$	-	-	Pseudo skalar
$\partial / \partial \vec{r} \times \vec{E}$	+	+	Pseudo vektor
$\partial / \partial \vec{r} \times \vec{B}$	-	-	Vektor
$\dot{\vec{E}}$	-	-	Vektor
$\dot{\vec{B}}$	+	+	Pseudo vektor

Aus der Invarianzforderung der Gleichungen folgt, daß nur Größen mit gleichem Transformationsverhalten verknüpft werden können.

- 1) + + Skalar $\rho, \text{div } \vec{E}$
- 2) - - Vektor $\vec{j}, \text{rot } \vec{B}, \dot{\vec{E}}$ ($\vec{r}$ - steht schon in $\vec{j}$)
- 3) - - Skalar $\text{div } \vec{B}$
- 4) + + Vektor $\text{rot } \vec{E}, \dot{\vec{B}}$
- 5) + - Vektor $\vec{E} (\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ ($\vec{r}$ sollte nicht vorkommen, da Raum homogen)
- 6) - + Vektor $\vec{B}$

$\hookrightarrow$ 1) $\rho = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$
 3) $0 = \text{div } \vec{B}$
 5) ~~$\vec{E} = 0$~~

2) $\vec{j} = \alpha \dot{\vec{E}} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B}$
 4) $0 = \text{rot } \vec{E} + \beta \dot{\vec{B}}$
 6) ~~$\vec{B} = 0$~~

Das System 1) - 4) ist vollständig, da $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch Quellen und Wirbel bis auf Konstante bestimmt sind.

Es ist widerspruchsfrei (zu zeigen), z.B. (3), (4): $\text{div rot } \vec{E} + \beta \frac{1}{c} \text{div } \vec{B} = 0 + 0 //$.

Konstantendiskussion:

I. ϵ_0 frei wählbar, da α nur bis auf Faktor bestimmt ist.

z.B. $\epsilon_0 = 1$ Gaußsches Maßsystem

($4\pi\epsilon_0 = 1$ Gaußsches Maßsystem)

In SI-System wird dagegen μ_0 festgelegt.

$$[\mu_0] = \frac{[\vec{B}]}{[\vec{I}]} \frac{[e]^2}{[e]} = \frac{[\vec{B}]}{[\vec{I}]} \frac{[e]}{[e]} = \frac{[FB]}{[I]^2} = \frac{N}{A^2} \quad ;$$

$\vec{I} = \vec{j} \times \vec{d}$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad (\text{Zahl willkürlich})$$

II. α aus Ladungserhaltung $\vec{j} + \text{div } \vec{j} = 0$

$$\text{Einsetzen: } (\epsilon_0 + \alpha) \frac{1}{c} \text{div } \vec{E} \stackrel{!}{=} 0 \quad \leadsto \quad \alpha = -\epsilon_0$$

$$III. \quad [\epsilon_0 \mu_0] = \frac{[B]}{[e]} \frac{[e]}{[e]} = \frac{1}{[v]^2}$$

$\leadsto$ Fundamentale Geschwindigkeit $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

IV. $\beta = 1$ ergibt sich aus der Invarianz der Maxwell-Gl. von Inertialsystem zu Inertialsystem (o.B.)

Table 2 Definitions of ϵ_0 , μ_0 , $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, Macroscopic Maxwell Equations, and Lorentz Force Equation in Various Systems of Units

Where necessary the dimensions of quantities are given in parentheses. The symbol c stands for the velocity of light in vacuum with dimensions $(l t^{-1})$.

System	ϵ_0	μ_0	$\mathbf{D}, \mathbf{H}$	Macroscopic Maxwell Equations	Lorentz Force per Unit Charge
Electrostatic (esu)	1	c^{-2} $(l^2 l^{-2})$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = c^2\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Electromagnetic (emu)	c^{-2} $(l^2 l^{-2})$	1	$\mathbf{D} = \frac{1}{c^2}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Gaussian	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
Heaviside-Lorentz	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
SI	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$ $(l^2 m^{-1} l^{-3})$	$4\pi \times 10^{-7}$ $(m l l^{-2} t^{-2})$	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

in the five common systems of units of Table 1. For each system of units the continuity equation for charge and current is given by (A.1), as can be verified from the first pair of the Maxwell equations in the table in each case.* Similarly, in all systems the statement of Ohm's law is $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, where σ is the conductivity.

4 Conversion of Equations and Amounts Between SI Units and Gaussian Units

The two systems of electromagnetic units in most common use today are the SI and Gaussian systems. The SI system has the virtue of overall convenience in

Table 3 Conversion Table for Symbols and Formulas

The symbols for mass, length, time, force, and other not specifically electromagnetic quantities are unchanged. To convert any equation in SI variables to the corresponding equation in Gaussian quantities, on both sides of the equation replace the relevant symbols listed below under "SI" by the corresponding "Gaussian" symbols listed on the left. The reverse transformation is also allowed. Residual powers of $\mu_0\epsilon_0$ should be eliminated in favor of the speed of light ($c^2\mu_0\epsilon_0 = 1$). Since the length and time symbols are unchanged, quantities that differ dimensionally from one another only by powers of length and/or time are grouped together where possible.

Quantity	Gaussian	SI
Velocity of light	c	$(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$
Electric field (potential, voltage)	$\mathbf{E}(\Phi, V)/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$	$\mathbf{E}(\Phi, V)$
Displacement	$\sqrt{\epsilon_0/4\pi} \mathbf{D}$	$\mathbf{D}$
Charge density (charge, current density, current, polarization)	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho(q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$	$\rho(q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$
Magnetic induction	$\sqrt{\mu_0/4\pi} \mathbf{B}$	$\mathbf{B}$
Magnetic field	$\mathbf{H}/\sqrt{4\pi\mu_0}$	$\mathbf{H}$
Magnetization	$\sqrt{4\pi/\mu_0} \mathbf{M}$	$\mathbf{M}$
Conductivity	$4\pi\epsilon_0\sigma$	σ
Dielectric constant	$\epsilon_0\epsilon$	ϵ
Magnetic permeability	$\mu_0\mu$	μ
Resistance (impedance)	$R(Z)/4\pi\epsilon_0$	$R(Z)$
Inductance	$L/4\pi\epsilon_0$	L
Capacitance	$4\pi\epsilon_0 C$	C

$$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,8 \dots \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu_0 = 1.256\,637\,0 \dots \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.730\,3 \dots \Omega$$

*Some workers employ a modified Gaussian system of units in which current is defined by $I = (1/c)(dq/dt)$. Then the current density $\mathbf{J}$ in Table 2 must be replaced by $c\mathbf{J}$, and the continuity equation is $\nabla \cdot \mathbf{J} + (1/c)(\partial\rho/\partial t) = 0$. See also the footnote to Table 4.

Sect. 4 Conversion of Equations and Amounts Between SI Units and Gaussian Units 783

Table 4 Conversion Table for Given Amounts of a Physical Quantity

The table is arranged so that a given amount of some physical quantity, expressed as so many SI or Gaussian units of that quantity, can be expressed as an equivalent number of units in the other system. Thus the entries in each row stand for the same amount, expressed in different units. All factors of 3 (apart from exponents) should, for accurate work, be replaced by $(2.997\,924\,58)$, arising from the numerical value of the velocity of light. For example, in the row for displacement (D), the entry $(12\pi \times 10^5)$ is actually $(2.997\,924\,58 \times 4\pi \times 10^5)$ and "9" is actually $10^{-16} c^2 = 8.987\,55 \dots$. Where a name for a unit has been agreed on or is in common usage, that name is given. Otherwise, one merely reads so many Gaussian units, or SI units.

Physical Quantity	Symbol	SI		Gaussian
Length	l	1 meter (m)	10^2	centimeters (cm)
Mass	m	1 kilogram (kg)	10^3	grams (g)
Time	t	1 second (s)	1	second (s)
Frequency	ν	1 hertz (Hz)	1	hertz (Hz)
Force	F	1 newton (N)	10^5	dynes
Work	W	1 joule (J)	10^7	ergs
Energy	U			
Power	P	1 watt (W)	10^7	ergs s ⁻¹
Charge	q	1 coulomb (C)	3×10^9	statcoulombs
Charge density	ρ	1 C m ⁻³	3×10^3	statcoul cm ⁻³
Current	I	1 ampere (A)	3×10^9	statamperes
Current density	J	1 A m ⁻²	3×10^5	statamp cm ⁻²
Electric field	E	1 volt m ⁻¹ (Vm ⁻¹)	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$	statvolt cm ⁻¹
Potential	Φ, V	1 volt (V)	$\frac{1}{300}$	statvolt
Polarization	P	1 C m ⁻²	3×10^5	dipole moment cm ⁻³
Displacement	D	1 C m ⁻²	$12\pi \times 10^5$	statvolt cm ⁻¹ (statcoul cm ⁻²)
Conductivity	σ	1 siemens m ⁻¹	9×10^9	s ⁻¹
Resistance	R	1 ohm (Ω)	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	s cm ⁻¹
Capacitance	C	1 farad (F)	9×10^{11}	cm
Magnetic flux	ϕ, F	1 weber (Wb)	10^8	gauss cm ² or maxwells
Magnetic induction	B	1 tesla (T)	10^4	gauss (G)
Magnetic field	H	1 A m ⁻¹	$4\pi \times 10^{-3}$	oersted (Oe)
Magnetization	M	1 A m ⁻¹	10^{-3}	magnetic moment cm ⁻³
Inductance*	L	1 henry (H)	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	

*There is some confusion about the unit of inductance in Gaussian units. This stems from the use by some authors of a modified system of Gaussian units in which current is measured in electromagnetic units, so that the connection between charge and current is $I_m = (1/c)(dq/dt)$. Since inductance is defined through the induced voltage $V = L(dI/dt)$ or the energy $U = \frac{1}{2}LI^2$, the choice of current defined in Section 2 means that our Gaussian unit of inductance is equal in magnitude and dimensions ($l^2 I^{-1}$) to the electrostatic unit of inductance. The electromagnetic current I_m is related to our Gaussian current I by the relation $I_m = (1/c)I$. From the energy definition of inductance, we see that the electromagnetic inductance L_m is related to our Gaussian inductance L through $L_m = c^2 L$. Thus L_m has the dimensions of length. The modified Gaussian system generally uses the electromagnetic unit of inductance, as well as current. Then the voltage relation reads $V = (L_m/c)(dI_m/dt)$. The numerical connection between units of inductance is

$$1 \text{ henry} = \frac{1}{9} \times 10^{-11} \text{ Gaussian (es) unit} = 10^9 \text{ emu}$$

2.5. Die integrale Formulierung der Maxwell-Gleichungen

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \leadsto \quad \epsilon_0 \int_V dV \operatorname{div} \vec{E} = \int_V dV \rho \quad \xrightarrow{\text{Gauß}} \quad \underline{\epsilon_0 \oint d\vec{A} \cdot \vec{E} = Q_{\text{in}}}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\leadsto \quad \underline{\oint d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Stokes}} \quad \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E} + \iint_A d\vec{A} \cdot \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{j}$$

$$\leadsto \quad \underline{\frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{B} - \epsilon_0 \iint_A d\vec{A} \cdot \dot{\vec{E}} = I_{\text{in}}}$$

(Orientierung der Randkurve gemäß rechter Hand)

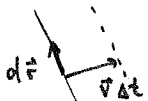
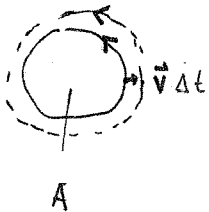
Bem.: $\vec{r}$ und t sind in der Edyn (wie in jeder Feldtheorie) unabhängige Variable $\leadsto$ Felder hängen von $\vec{r}$ und t ab (nicht von $\vec{r}^{\dot{}}$ - das gibt es nicht!). Eine explizite Abh. der ^{Grund-}Gleichungen von $\vec{r}$ und t kann nicht existieren, da dann Raum- oder Zeitpunkt ausgezeichnet wäre.

2.6. Induktionsgesetz für Leiterschleifen

Magnetischer Fluss durch eine Fläche $\vec{A}$ im Raum $\quad \underline{\phi = \iint_A d\vec{A} \cdot \vec{B}}$

Änderung des Flusses durch $\begin{cases} \text{Änderung von } \vec{B} \\ \text{Änderung der Fläche} \end{cases}$

$\vec{v}(\vec{r}, t)$... Verschiebung der Randkurvenpunkte



$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \Delta \iint_A d\vec{A} \cdot \vec{B} = \iint_A d\vec{A} \cdot \Delta \vec{B} + \iint_{\Delta A} d\vec{A} \cdot \vec{B} \\ &= \Delta t \iint_A d\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \oint_{\partial A} (\vec{v} \Delta t \times d\vec{r}) \cdot \vec{B} \\ &= \Delta t \left(\iint_A d\vec{A} \cdot \dot{\vec{B}} - \oint d\vec{r} (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \end{aligned}$$

$$\dot{\Phi} = \iint d\vec{A} \cdot \dot{\vec{B}} = \oint d\vec{r} (\vec{v} \times \vec{B})$$

Maxwell $\rightarrow$
$$-\dot{\Phi} = \oint_{\partial A} d\vec{r} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$
 „Induktionsgesetz“

Materialisierte Leiterschleife:

$$U_{\text{ind}} = \oint d\vec{r} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = -\dot{\Phi} \quad \text{Lenz'sche Regel}$$

Begründung:



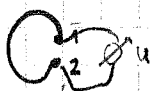
$$\vec{F}_{\text{auf Ladung}} = Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = Q \vec{E}'$$

$\uparrow$ Laborsystem $\uparrow$ Mitbewegtes Bezugssystem mit $\vec{v}' = 0$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (\vec{E} \text{ abh. von } B_z)$$

Ohmsches Gesetz: $\vec{j}' = \sigma \cdot \vec{E}'$

$\rightarrow$ Offene Schleife:



$$\oint d\vec{r} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \oint d\vec{r} \cdot \vec{E}' = \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{E}' = U_{\text{ind}}$$

$\uparrow$ kleine Lücke

$\rightarrow$ Geschlossene Schleife:



$$I = \iint_{\text{Querschnitt}} d\vec{A} \cdot \vec{j} = \iint_{\text{Querschnitt}} d\vec{A} \cdot \vec{j}_{\text{tangential}} = \iint_{\text{Querschnitt}} d\vec{A} \cdot \sigma \vec{E}'_{\text{tang.}}$$

$$I = A \sigma E'_{\text{tang.}}$$

$\uparrow$ drehen Leiter

$$I = \text{const, homogen} \rightarrow E'_{\text{tang.}} = I / A \sigma$$

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{E}' = I \oint \frac{d\ell}{A \sigma} = I \cdot R = U_{\text{ind}}$$

Richtung des induzierten Stroms: wirkt Ursache entgegen! (Lenz)

$\vec{B} \odot$; $\dot{\Phi} < 0$ bewirkt $U_{\text{ind}} > 0$ und Strom $\odot$. Der erzeugt Feld $\odot$.

3. Elektrostatik

3.1. Grundgleichungen — Elektostatisches Potential

Maxwell: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\epsilon \cdot \operatorname{div} \vec{E} = \rho$
 $\operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$ $\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon \cdot \dot{\vec{E}} = \vec{j}$

Statisch $\hat{=}$ keine zeitabhängigkeit $\leadsto \dot{\vec{E}} = 0, \dot{\vec{B}} = 0$

$\leadsto$ Entkopplung von Elektrizität und Magnetismus

Elektrostatik (Kap 3)
 Stationäre Ströme (Kap 4)

Ruhende Ladungen $\leadsto \vec{j} = 0 \leadsto \vec{B} = 0$

Damit $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, Einführen eines Potentials φ mit
 Gradientenfelder sind wirbelfrei.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

bzw. $\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$$\Delta \varphi = -\rho / \epsilon_0$$

Poisson-Gleichung
 der Elektrostatik

3.2. Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

$\rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r}|)$ $\leadsto \varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$, Äquipotentialflächen sind Kugeln
 $\leadsto \operatorname{grad} \varphi \parallel \vec{r}$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = E(r) \hat{e}_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{e}_r$$

$$\epsilon_0 \iint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = Q_{\text{in}} \quad \text{Kugelgeometrie: } 4\pi \epsilon_0 r^2 E(r) = Q_{\text{in}}(r)$$

$$\leadsto E(r) = \frac{Q_{\text{in}}(r)}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

(Konstante Ladungsverteilung in Kugel ist egal,
 sofern kugelsymmetrisch)

Punktladung Q : $E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$, $\varphi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + \varphi_0$, $\varphi_0 = \varphi(r=\infty)$

3.3. Feld einer beliebigen räumlich begrenzten

Ladungsverteilung

Punktladung bei $\vec{r}_0$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Mehrere Punktladungen:
(Superposition wegen Linearität der gl.)

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

4.11.

Einschub: Ladungsverteilung einer Punktladung und Delta-Funktion

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ \infty & \vec{r} = \vec{r}_0 \end{cases}$$

$$\int_{\vec{r}_0 \in V} dV \rho(\vec{r}) = Q$$

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\int_{\vec{r}_0 \in V} dV \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 1$$

In einer Dimension:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$$

$$\text{bzw.} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0) \quad \text{für glatte Fkt } f$$

übliche Definition der Delta-Funktion:
(korrekt: Delta-Distribution)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)}$$

In drei Dimensionen:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \int dV \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0)$$

↑
gilt nur in kartesischen Koordinaten

Potential einer Punktladung bei $\vec{r}_0$:

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|} \end{aligned}$$

Delta-Funktion als Limes glatter Funktionen:

$$\cdot \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$



$$\cdot \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\pi x^2 / \varepsilon^2}$$

$$\cdot \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin x/\varepsilon}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{ikx} dk$$

Einschub:

Greensche Funktion

(zur Lösung inhomogener linearer (Differential-) Gleichungen)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearer Operator}}}{L} \varphi(x_1, \dots, x_n) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Inhomogenität}}}{p(x_1, \dots, x_n)}, \quad \text{kurz} \quad \underline{L \varphi(x) = p(x)}$$

Die Greensche Fkt. $g(x, x')$ zum Operator L ist die Lösung der (Differential-) Gleichung mit δ -förmiger Inhomogenität:

$$\boxed{L g(x, x') = \delta(x - x')} \quad (= \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \dots \delta(x_n - x'_n))$$

Wenn g bekannt ist, kann die Lsg für jede beliebige Inhomogenität durch Superposition gewonnen werden:

$$\underline{\varphi(x) = \int dx' g(x, x') p(x')}$$

Beweis durch Einschub:

$$L \varphi(x) = \int dx' \underbrace{L g(x, x')}_{\delta(x-x')} p(x') = p(x) \quad \text{qed.} //$$

Anwendung auf Potential einer Ladungsverteilung:

$$-\epsilon_0 \Delta \varphi(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

Einführen von g :

$$-\epsilon_0 \Delta g(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

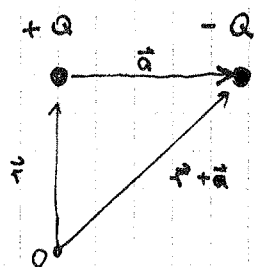
 $(g(\vec{r}, \vec{r}') = g(\vec{r} - \vec{r}') \text{ wg. Translationsinvarianz})$
Wir kennen g : Potential einer Punktladung der Größe 1

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|}$$

Damit lautet Lösung der Poisson-Gleichung $-\epsilon_0 \Delta \varphi = \rho$:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int dV' g(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

3.4. Feld eines elektrischen Dipols



Zwei Ladungen,

Dipolmoment

$$\vec{p} = Q \vec{a}$$

(Dipol-Limit
 $|\vec{a}| \rightarrow 0, a \rightarrow \infty : |p| = \text{const.}$)

$$\sim \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{a}|} \right)$$

$$|\vec{a}| \ll |\vec{r}|$$

Kleine a bzw.
 große Abstände:

$$\frac{1}{|\vec{r} + \vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \left(\vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{1}{|\vec{r}|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \otimes \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \otimes \frac{1}{|\vec{r}|^3} = \frac{3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbb{1}r^2}{r^5}$$

Damit:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} - \vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{r} \right) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \otimes \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5}$$

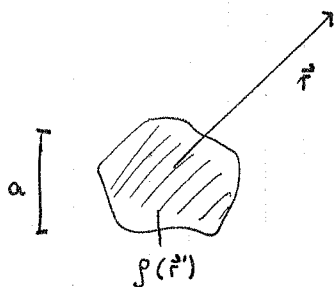
Sym. Tensor

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r})$$

$$E_i = \nabla_j p_j \nabla_j \frac{1}{r} = p_j \nabla_i \nabla_j \frac{1}{r}$$

3.5. Fernfeld einer räumlich begrenzten Ladungsverteilung:

Multipolentwicklung



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Fernfeld: $|\vec{r}| \gg a \leadsto \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ entwickeln

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\vec{r}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right)^n \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - \vec{r}'^2 \vec{r}^2}{r^5} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int dV' \rho(\vec{r}') + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}') + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} \int dV' (3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}'^2) \right. \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{D} \cdot \vec{r}}{r^5} + \dots \right] \\ &\quad \sim \frac{1}{r} \quad \quad \quad \sim \frac{1}{r^2} \quad \quad \quad \sim \frac{1}{r^3} \end{aligned}$$

Multipolmomente einer Ladungsverteilung:

Monopol $Q = \int dV \rho(\vec{r})$

Dipol $\vec{p} = \int dV \vec{r}' \rho(\vec{r}')$

Quadrupol $\vec{D} = \int dV (3 \vec{r}' \otimes \vec{r}' - \mathbb{1} \vec{r}'^2) \rho(\vec{r}')$

Oktupol ...

Bezugspunkt

hängen i.a. von Koord. ab!
Aber: Erster nichtverschwindendes Multipolmoment ist unabhängig von Koord. Wahl

Eigenschaften von $\vec{D}$: $D_{ij} = D_{ji}$; $\text{Sp } \vec{D} = \sum_i D_{ii} = \int dV (3r^2 - 3r^2) = \underline{0}!$

- $\vec{D}$ hat 5 unabhängige Komponenten.
- $\vec{D}$ kann Hauptachsen transformiert werden (siehe Trägheitstensor)
- $\forall \vec{r}$ $\text{Sp } \vec{D} = 0$ ist $\vec{D} = 0$ für Kugel, Würfel.

Multipole haben charakteristische Richtungsabhängigkeit: $\varphi(\vec{r}) = Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \cdot \varphi(r)$

Monopol	$l=0$	$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$
Dipol	$l=1$	$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) \cdot \cos \angle(\vec{r}, \vec{p})$
Quadrupol	$l=2$	$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) \cdot Y_{l=2, m}$

3.6. Randbedingungen

• $-\varepsilon_0 \Delta \varphi = \rho$ ist ^{lineare} Dgl 2. Ordnung

~ allgemeine Lösung hängt von Randbedingungen ab

Vollständige Lösung:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_h$$

partikuläre Lsg.
des inhom. Gl.

allg. Lösung
des hom. Gl. $\Delta \varphi = 0$

bisher: Rb.
 $\varphi(\infty) = 0$

→ $\varphi_h \equiv 0$

hier geht Randbed. einbauen

Mathematik:

1 Randbed. auf geschlossenem Rand $R \rightarrow$ eindeutige Lösung
(Beweis s.u.)

Varianten:

(A)

$\varphi(R)$ gegeben

Dirichlet-Rb

(B)

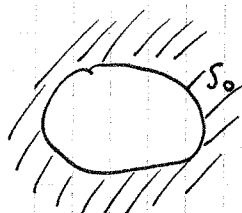
$\partial \varphi / \partial n (R)$ (Normalableitung $\hat{=}$ -Normalkomponente von $\vec{E}$)
gegeben: $\partial \varphi / \partial n = \hat{n} \cdot \partial \varphi / \partial \vec{r} = -\vec{E}_n$

v. Neumann-Rb

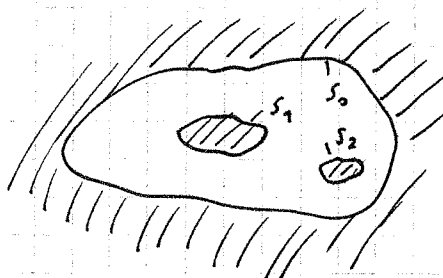
(C)

$\alpha \varphi + \beta \partial \varphi / \partial n$

Randflächen:



eine Randfläche



mehrere Teilflächen

Falls äußere Randfläche $S_0 \rightarrow \infty$, dann Rb für $\varphi(\infty)$ nötig.

Warum ist für Dgl. 2. Ordnung nur 1 Rb. nötig?

Antwort: Sind eigentlich 2 Rb., da Rand geschlossen (links & rechts).

Beweis

Annahme 1 Rb., 2 Lösungen φ_1 & φ_2 .

Wir zeigen $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{const.}$

Also:

$$-\varepsilon_0 \Delta \varphi_1 = -\varepsilon_0 \Delta \varphi_2 = \rho$$

$$\phi := \varphi_2 - \varphi_1, \quad \Delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \underbrace{\phi \Delta \phi}_0 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2$$

Divergenz Theorem

$$\int dV \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \int dV \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2$$

$$\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

"R"

- Varianten:
- (A) $\varphi(R)$ fest $\leadsto \varphi_1(R) = \varphi_2(R) \leadsto \phi(R) = 0 \leadsto \oint_R d\vec{A} \cdot \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$
 - (B) $\frac{\partial \varphi}{\partial n}(R)$ fest $\leadsto \frac{\partial \phi}{\partial n}(R) = 0 \leadsto -1-$
 - (C) u.o.

$$\int dV \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 = 0 \leadsto \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \leadsto \phi = \varphi_2 - \varphi_1 = \text{const.}$$

ohne phys. Bedeutung //

3.7. Leiter im elektrostatischen Feld

Elektrostatik:

ruhende Ladungen

Leiter:

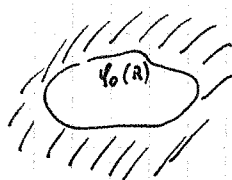
bewegliche Ladungen (innerhalb des Leiters)

↗ Gleichgewicht sei $\vec{F} = 0$, $\vec{E} = 0$, $\varphi = \text{const}$ (im Leiter)

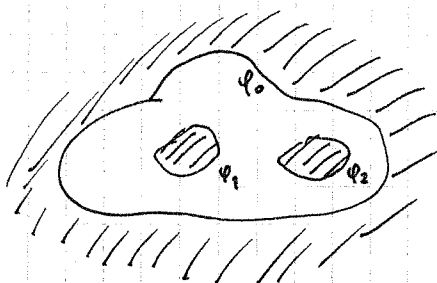
! $\varphi = \text{const}$ im Inneren und auf Oberfläche des Leiters

↗ $\rho = 0$ im Inneren

Geometrie:



φ_0 willkürlich



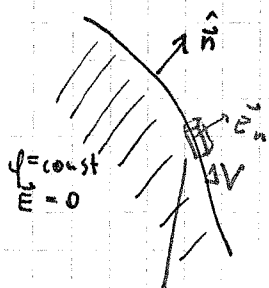
$\varphi_1 - \varphi_0$, $\varphi_2 - \varphi_0$ haben physikalische Bedeutung

Für $S_0 \rightarrow \infty$ wird $\varphi_0 = \varphi(\infty) = 0$ (Konvention),

dann haben $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1$ und $\varphi_2 - \varphi_0 = \varphi_2$ physikalische Bedeutung (d.h. auch absolute Werte φ_1, φ_2).

Leiteroberfläche

Beweglichkeit der Ladungen bedeutet nur $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters und $\vec{E}_{\text{tangential}} = 0$ auf Oberfläche.



Volumenelement ΔV auf Oberfläche ΔA mit Ladung ΔQ

Wg $\varphi = \text{const}$ ist Oberfläche eine Äquipotentialfläche.

$\vec{E} = -\partial\varphi/\partial\vec{r}$ steht senkrecht auf Rand, $\vec{E} = \vec{E}_n \parallel \hat{n}$,

und wird durch Oberflächenladungen erzeugt

$$\epsilon_0 \oint_{\partial\Delta V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = \Delta Q \quad \leadsto \quad \epsilon_0 \Delta A E_n = \Delta Q$$

Flächenladungsdichte

$$\sigma \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \epsilon_0 E_n$$

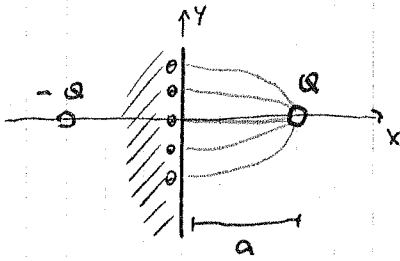
Oberflächenladung

$$Q = \iint dA \sigma$$

Oberflächenladungen werden durch ein äußeres elektrisches Feld erzeugt;
sie schützen das Innere des Leiters vom Feld ab.

3.8. Beispiele

Ⓐ Punktladung und ebene Leiterfläche: Spiegel Ladungen



$$\varphi(x=0) = 0 \quad \text{Leiterfläche}$$

$$-\epsilon_0 \Delta \varphi = Q \delta(\vec{r} - a\hat{e}_x)$$

Anordnung aus 2 Punktladungen (Q bei $a\hat{e}_x$ und $-Q$ bei $-a\hat{e}_x$)
erzeugt für $x > 0$ gleiches Feld/Potential wie obige Anordnung.

Begründung allgemein: Für ein beliebiges (gegebenes) Potential $\varphi(\vec{r})$
ändert das Anbringen eines Leiters mit Leiteroberfläche = Äquipotentialfläche
das Feld außerhalb des Leiters nicht!

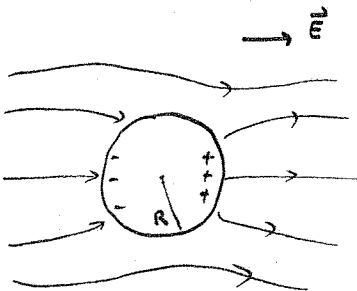
Mathematisch: $-\epsilon_0 \Delta \varphi = \rho$ gilt außerhalb des Leiters unverändert,
und Randbed. sind (effektiv) identisch!

Für obige Situation:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - a\hat{e}_x|} - \frac{1}{|\vec{r} + a\hat{e}_x|} \right)$$

$$-\epsilon_0 \Delta \varphi = Q \left(\delta(\vec{r} - a\hat{e}_x) - \delta(\vec{r} + a\hat{e}_x) \right)$$

Ⓑ Kugelleiter in einem asymptotisch homogenen Feld



$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{für } r > R$$

$$\text{Randbedingungen: } \varphi(r=R) = \varphi_0 = 0$$

$$\varphi(r \rightarrow \infty) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \quad (\text{homogenes Feld } \vec{E}_0)$$

Symmetrie überlegen: $\varphi(\vec{r}, R, \vec{E}_0)$ muß skalar und linear in $\vec{E}_0$ sein.

$$\leadsto \underline{\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \, g(r, R)} \quad (\text{Ansatz})$$

$$\text{Randbed: } g(r=R) = 0, \quad g(r \rightarrow \infty) = 1$$

Einsetzen: $\Delta \varphi = - \vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left(\frac{4}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2} \right) \stackrel{!}{=} 0$

Homogene Dgl für g . Löse mit Ansatz $g \sim r^n$.

Ergibt $4n + n(n-1) = 0 \leadsto n = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$

$\leadsto g = c_1 + c_2/r^3$

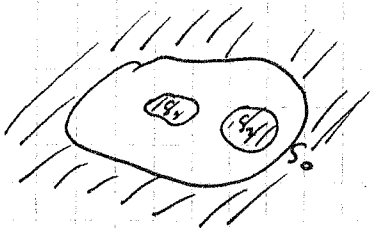
Mit RL: $g(\infty) = 1 \leadsto c_1 = 1$

$g(r=R) = 0 \leadsto c_2 = -R^3$

Also $\varphi = - \vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ mit $\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} = \vec{E}_0 R^3$

Das zusätzliche Feld hat Dipol-Form! D.h. äußeres Feld $\vec{E}_0$ induziert ein Dipolmoment $4\pi\epsilon_0 \vec{E}_0 R^3$ in der Kugel.

3.9. Mehrere Leiter



Keine Raumladungen

Randbedingungen

$\Delta \varphi = 0$

$\varphi = \varphi_i$ auf S_i

($\varphi_0 = 0$ willkürlich)

Linearität der Gleichungen:

$\varphi(\vec{r}) = \sum_k G_k(\vec{r}) \varphi_k$

hängen von Geometrie ab

Ladungen auf den S_i :

$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_i} = \epsilon_0 \vec{E}_n \Big|_{S_i} = -\epsilon_0 \sum_k \left. \frac{\partial G_k(\vec{r})}{\partial n} \right|_{S_i} \varphi_k$

$Q_i = \oint_{S_i} dA \sigma = -\epsilon_0 \sum_k \oint_{S_i} d\vec{A} \cdot \frac{\partial G_k}{\partial \vec{r}} \varphi_k =: \sum_k C_{ik} \varphi_k$

Kapazitätskoeffizienten:

$|Q_i| = \sum_k C_{ik} \varphi_k$

(hängen nur von Geometrie ab)

$C_{ik} = -\epsilon_0 \oint_{S_i} d\vec{A} \cdot \frac{\partial G_k}{\partial \vec{r}}$

$C_{ik} = C_{ki}$ o.B.

($Q_0 = -\sum_i Q_i$, für $\vec{E} = 0$ in S_0 !)

Zwei sich umschließende Leiter:

$Q_1 = C_{11} \varphi_1 \hat{=} Q = C \cdot U \quad (Q_0 = -Q_1)$

4. Stationäre Ströme

4.1. Grundgleichungen - Vektorpotential

Maxwell:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0 & \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} &= \vec{j} \end{aligned}$$

Stationär $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \leadsto \quad \dot{\vec{E}} = 0 \quad \leadsto \quad \operatorname{div} \vec{j} \stackrel{\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0}{=} 0$

Wirbelfelder sind quellenfrei. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ läßt sich durch Einführung eines Vektorpotentials $\vec{A}$ auflösen:

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}}$$

Eichinvariant: $\vec{B}$ bestimmt $\vec{A}$ nicht eindeutig, denn $\vec{A}$ und $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$ liefern wegen $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi = 0$ dasselbe $\vec{B}$ -Feld.

$\leadsto \vec{A}$ ist bis auf Eichtransformation $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$ (mit beliebiger skalarer Fkt $\chi(\vec{r})$) bestimmt. Bei spezieller Wahl von χ spricht man von fixierter Eichung.

Weiter mit Maxwell für stationäre Ströme. $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}$

$$\leadsto \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{j} \quad \text{oder} \quad \underline{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}}$$

Es bietet sich an, die Eichung $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ (Coulomb-Eichung) zu wählen. (Für beliebiges $\vec{A}$ gilt $\operatorname{div} \vec{A}' = 0$ mit $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$, $\Delta \chi = -\operatorname{div} \vec{A}$.)
 Dann $\begin{matrix} \uparrow \\ \text{lösbar - Poisson!} \end{matrix}$

$$\boxed{-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}}$$

[Analogie zur Elektrostatik: $-\Delta \varphi = \rho / \epsilon_0$ wird gelöst durch $\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}]$

$\leadsto \quad \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dV' \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} \quad (\text{mit } \operatorname{div} \vec{A} = 0)$

Es folgt $(\vec{B} = \text{rot } \vec{A})$:

4-2

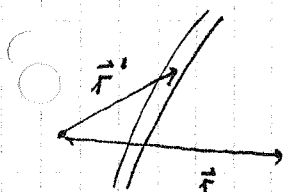
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dV' \vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Kontrolle: $\text{div } \vec{A} = 0$?

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV'' \frac{\vec{j}(\vec{r} + \vec{r}'')}{r''} \quad (\vec{r} - \vec{r}' = \vec{r}'')$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV'' \frac{1}{r''} \underbrace{\text{div } \vec{j}(\vec{r} + \vec{r}'')}_0 = 0 //$$

4.2. Leiterschleifen



Obige Formel für „dünne“ Leiter: $d \ll |\vec{r} - \vec{r}'|$;

Dann ist

$$\frac{dV' \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{d\vec{r}' I}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Mehrere Leiter $L_n \leadsto \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_n I_n \int_{L_n} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_n I_n \int_{L_n} d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Biot - Savartsches
Gesetz

Mehrere geschlossene Leiterschleifen:

Magnetischer Fluss

$$\phi_m = \iint_{S_m} d\vec{A} \cdot \vec{B} = \oint_{\partial S_m} d\vec{r} \cdot \vec{A}$$

Mit Biot - Savart:

$$\phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_n I_n \oint_{\partial S_m} d\vec{r} \oint_{\partial S_n} d\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} =: \sum_n L_{mn} I_n$$

Induktivitätskoeffizienten:

$$\phi_i = \sum_k L_{ik} I_k$$

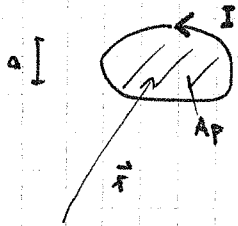
$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_i} d\vec{r} \oint_{\partial S_k} d\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad L_{ii} = L_{ii}$$

$i \neq k$: Selbstinduktivität, kann nicht mit dieser Formel berechnet werden,
da Näherung des dünnen Leiters zusammenbricht

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

4-1

4.3. Magnetischer Dipol



Leiterschleife mit Ringstrom,

Dipolmoment $\vec{m} = I \cdot \vec{A}_F$

(Dipol-Limit: $|\vec{A}_F| \rightarrow 0, I \rightarrow \infty, |\vec{m}| = \text{const.}$)

Fläche mit Normalenrichtung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Kleiner A_F bzw.

große Abstände: $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}$

$$\oint \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \oint \frac{d\vec{r}'}{r} + \frac{1}{r^3} \oint d\vec{r}' \otimes \vec{r}'$$

Umformen des Integrals:

$$\oint d\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{a}) = \frac{1}{2} \left[\oint d\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{a}) - \oint (d\vec{r}' \cdot \vec{a}) \vec{r}' \right] + \frac{1}{2} \left[\oint d\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{a}) + \oint (d\vec{r}' \cdot \vec{a}) \vec{r}' \right]$$

$$= \frac{1}{2} \oint (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{a} + \frac{1}{2} \oint d \left[\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{a}) \right]$$

Fläche $\vec{A}_F$

(Dreieck!)

Für nicht-dense Schleife wird hier über $d\vec{A}_F$ vektoriell (!) summiert!

16.11

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{A}_F \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

(Vgl. elektr. Dipol $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\vec{A}_F \times \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}$$

$$\vec{A}_F \Delta \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi} \delta(\vec{r}) - \frac{(\vec{A}_F \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \frac{1}{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \delta(\vec{r}) - \frac{(\vec{A}_F \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \frac{1}{r}}{r^3}$$

Statt Leiterschleife:

Ladung auf Umlaufbahn

(Ladung Q ,
Masse M)

$$I = Q/\tau \quad \swarrow \text{Umlaufzeit}$$

$$\vec{A}_P = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \underbrace{\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)}_{\frac{1}{M} \vec{L}} = \frac{1}{2} \tau \frac{\vec{L}}{M}$$

$$\vec{m} = I \cdot \vec{A}_P = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{Q}{M}}_{g_B = \frac{Q}{2M}} \vec{L} \quad \left(\text{vgl. } \mu_B = \frac{e \hbar}{2m} \right)$$

Allgemeine Stromverteilung

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int dV \left(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \right)$$

(hier o. B., Herleitung analog zu $\vec{p} = \int dV \vec{r} \rho(\vec{r})$)(Faktor $\frac{1}{2}$ von doppeltem Kreuzprodukt)

5. Elektromagnetische Wellen

5.1. Wellengleichung

Bisher: $\rho(\vec{r}), \vec{j}(\vec{r}), \partial_t = 0$

Jetzt: $\rho = 0, \vec{j} = 0, \partial_t \neq 0 \quad \leadsto \text{Wellen im Vakuum ohne Quellen}$

Maxwell für $\rho = 0, \vec{j} = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}} \end{aligned}$$

$$\leadsto \operatorname{rot} \dot{\vec{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \ddot{\vec{E}} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{E})}_{\rho/\epsilon_0 = 0} + \Delta \vec{E}$$

$$\leadsto \boxed{\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = \square \vec{E} = 0}$$

Wellengleichung
 $\square \vec{B} = 0$ analog

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}, \quad [c] = \text{Geschwindigkeit, const}$$

5.2. Lösungen der Wellengleichung

$$\square u = 0$$

a) Eindimensionale Lsg $\vec{r} \rightarrow x$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0$$

$$= \left(\frac{1}{c} \partial_t - \partial_x \right) \left(\frac{1}{c} \partial_t + \partial_x \right) u(x, t) = 0$$

$$\textcircled{1} \left(\frac{1}{c} \partial_t + \partial_x \right) u = 0 \quad \leadsto \quad \partial_t u = -c \partial_x u \quad \leadsto \quad u = u_1(x - ct)$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{1}{c} \partial_t - \partial_x \right) u = 0 \quad \leadsto \quad \partial_t u = +c \partial_x u \quad \leadsto \quad u = u_2(x + ct)$$

u_1, u_2 sind beliebige Fkt. eines Arguments.

→ Vollständige Lösung $u = u_1(x-ct) + u_2(x+ct)$

Anfangsbedingungen: $u(t=0, x)$, $\partial_t u(t=0, x)$

2 beliebige Fkt (Dgl. 2. Ordnung), AB können durch u_1 & u_2 befriedigt werden.

Ausbreitung mit $\pm c$.

b) Harmonische Wellen

$\square u = 0 \rightarrow$ Exponentialansatz $u = u_0 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t}$
 $= u_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

Einsetzen:

$$\square u = \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) u = \left[\left(\frac{-i\omega}{c} \right)^2 - (i\vec{k})^2 \right] u = 0$$

$\rightarrow \underline{\omega^2 = c^2 \vec{k}^2} \rightarrow$ Dispersionsrelation $\omega(\vec{k})$

Ausbreitungsrichtung $\hat{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$

Speziell $\vec{k} = k \vec{e}_x$, $u = u_0 e^{i(kx - \omega t)} = u_0 e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)}$

$$\underline{c = \frac{\omega}{k}}$$

Spezialfall für $u_1(x-ct)$ aus:

Phasengeschwindigkeit $(k = 2\pi/\lambda)$

Allgemein $\vec{k} = k \hat{n}$,

$$\underline{c = \hat{n} \frac{\omega}{k} = \frac{|\vec{k}|}{k} \omega}$$

c) Allgemeine Lösung

$$\underline{u(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(\int d^3k u(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)} \right)}$$

2 freie Funktionen $\text{Re } u(\vec{k})$, $\text{Im } u(\vec{k})$ für

2 reelle Anfangsbed. $u(\vec{r}, t=0)$, $\partial_t u(\vec{r}, t=0)$

5.3. Polarisation

$\vec{E} = 0$, spezielle Lsg $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

Bis jetzt ist $\vec{E}_0$ -Richtung beliebig. Aber:

$\text{div } \vec{E} = 0$:

$\text{div } \vec{E} = i \vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \stackrel{!}{=} 0 \leadsto \vec{k} \perp \vec{E}_0$

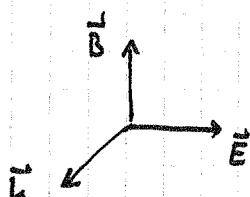
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\leadsto$

$i \vec{k} \times \vec{E} = i \omega \vec{B}$

$\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{k} \vec{B} \quad (\vec{k} \perp \vec{B}_0)$

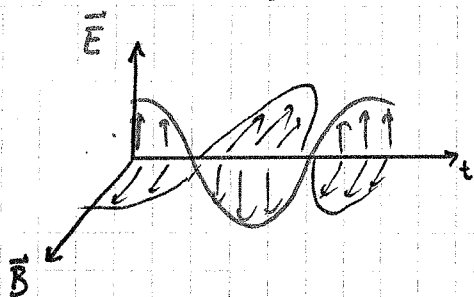
$\left(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}_0 = c \frac{\vec{B}_0}{\omega} \right)$

„Wellen sind transversal“



a) $\vec{E}_0$ reell

$\vec{E} = \text{Re } \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$
 $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$



„Lineare Polarisation“

b) $\vec{E}_0$ komplex



$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + i \vec{E}_2, \quad \vec{E}_1, \vec{E}_2 \perp \vec{k}, \text{ reell}$

$\vec{E} = \text{Re } \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - \vec{E}_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

(2 linear polarisierte Wellen mit Phasenverschiebung)

$\vec{r} = 0$

① $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2 \parallel \hat{e}$

$\vec{E}(t) = \hat{e} (E_1 \cos \omega t + E_2 \sin \omega t)$

$\vec{E} = \hat{e} E' \cos(\omega t + \varphi)$

Linear polarisiert

② $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$, speziell $\vec{E}_1 \parallel \hat{e}_x, \vec{E}_2 \parallel \hat{e}_y, \vec{k} \parallel \hat{e}_z$

$\vec{E}(t) = E_1 \hat{e}_x \cos \omega t + E_2 \hat{e}_y \sin \omega t$

Elliptisch polarisiert

Speziell $|E_1| = |E_2|$: $E_1 = \begin{cases} +E_2 \\ -E_2 \end{cases} \begin{matrix} \odot \\ \ominus \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{matrix} \text{ zirkular polarisiert}$

③ $\vec{E}_1 \not\parallel \vec{E}_2, \vec{E}_1 \not\perp \vec{E}_2 \leadsto$ auch Elliptisch polarisiert (o.B.)

6. Energie - und Impulsbilanz des

18.11 6-7

elektromagnetischen Feldes

6.1. Bilanzgleichungen

bekannt: $\dot{\vec{j}} + \text{div } \vec{j} = 0$



allgemein: Observable $A = \int_V dV a$, $a = dA/dV$ Dichte von A

$$\dot{A}(t) = -I_A + N_A = -\text{Strom} + \text{Erzeugungsrate}$$

Erzeugungsrate $N_A = \int_V dV a$

$$\int dV \partial_t a = - \oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{j}_a + \int dV a = \int dV (-\text{div } \vec{j}_a + a)$$

Stromdichte Erzeugungsrate

$\dot{a} + \text{div } \vec{j}_a = a$

 Allgemeine Bilanzgleichung

Für Erhaltungsgrößen: $N_A = 0, a = 0 \Rightarrow \dot{a} + \text{div } \vec{j}_a = 0, \dot{A} = - \oint d\vec{F} \cdot \vec{j}_a$
Falls $V \rightarrow \infty$: $\dot{A} = 0, A = \text{const}$

6.2. Energiebilanz des el. mag. Feldes

Punktladung: $\vec{F}_L = Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Leistung des Feldes an Punktladung $N = \text{Arbeit/zeit} = \vec{v} \cdot \vec{F}_L$

Energieänderung des el. mag. Feldes $\dot{W}_{\text{elm}} = -N = -\vec{v} \cdot \vec{F}_L = -Q \vec{v} \cdot \vec{E}$

↪ Änderung des Energiedichte
(mehrere Ladungsträger sorten)

$$\dot{u} = - \sum_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} = - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Bsp: Ohmsches Gesetz $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, $\dot{u} = -\sigma E^2 = -\frac{j^2}{\sigma}$ Ohmsche Wärme

Damit lautet Bilanzgl.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S}_p = \rho = - \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \left(\text{Poynting - Theorem} \right)$$

w = Energiedichte $\vec{S}_p$ = Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

w & $\vec{S}_p$ hängen von Feldern ab — noch zu bestimmen!

Maxwell:

$$\begin{aligned} \rho &= - \vec{j} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{rot} \vec{B}) \cdot \vec{E} \\ &= \partial_t \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \underbrace{(\operatorname{rot} \vec{E})}_{-\vec{B}} \\ &= \frac{1}{2} \partial_t \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \end{aligned}$$



$$\boxed{\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \\ \vec{S}_p &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\ \rho &= - \vec{j} \cdot \vec{E} \end{aligned}}$$

$$\partial_t w + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_p = \rho$$

6.3. Elektrostatische Feldenergie

$$w_e = \int dV \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 = - \int dV \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi \quad \left(\begin{aligned} \vec{E} &= - \operatorname{grad} \varphi, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \rho / \epsilon_0 \end{aligned} \right)$$

Erinnerung: partielle Integration in 3d

$$\int dV \frac{\partial}{\partial r_i} (uv) = \int dV \frac{\partial u}{\partial r_i} v + \int dV u \frac{\partial v}{\partial r_i} = \oint_{\partial V} d\vec{A} u v$$

Damit:

$$\begin{aligned} w_e &= \int dV \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{\nabla} \vec{E}) \varphi - \oint d\vec{A} \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int dV \rho \varphi \quad \rightarrow 0 \text{ für unendliches Integrationsvolumen (ganzer Raum)} \\ &= \frac{1}{2} \int dQ \varphi \end{aligned}$$

(Energie = Ladung · Potential)

umschreiben:

$$w_e = \frac{1}{2} \int dV \rho \varphi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dV dV' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Punktladungen: $w_e = \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \text{Selbstenergien } (i=j)$

$$= \sum_{i < j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \dots \quad (wie erwartet)$$

Selbstenergie einer Ladung:

(Kugel mit Radius a)

$$w_e = \propto \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

homogene Kugel $\alpha = 6/5$

Hohlkugel $\alpha = 1$

$w_e \rightarrow \infty$ für Punktladung!

(Klassische E.dynamik als Kontinuums Theorie nicht anwendbar! Funktional also nicht für Elementarteilchen (punktformig),

6.4. Elektrostatische Energie einer Leiteranordnung

Keine Raumladungen, nur Ladungen auf Leiteroberflächen

$$w_e = \frac{1}{2} \int dV \rho \varphi \stackrel{\frac{1}{2} \oint dA \sigma \varphi}{=} \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i \quad (\varphi = \varphi_i = \text{const auf Leiteroberfl. } S_i)$$

B. $Q_1 = -Q_2 = Q : w_e = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = Q^2 / 2C$

Allg. $Q_i = \sum_k C_{ik} \varphi_k$

$$\leadsto w_e = \frac{1}{2} \sum_{ik} \varphi_i C_{ik} \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{ik} Q_i \tilde{C}_{ik} Q_k \geq 0 \quad (\text{wegen}$$

$$w_e = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \tau$$

$\leadsto C_{ik}, \tilde{C}_{ik}$ positiv definit

z.B. $\varphi_i \neq 0, \varphi_k \neq 0 \leadsto C_{ii} \geq 0, \tilde{C}_{ii} > 0$

Kleine Ladungsänderung: $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$, $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$

$$\delta\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \delta\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \frac{1}{2} \int dV (\delta\rho \varphi + \rho \delta\varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \times 2 \int dV dV' \frac{\rho(\vec{r}) \delta\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \int dV \delta\rho \varphi = \int dV \rho \delta\varphi \end{aligned}$$

! ρ -Variation äquivalent zu φ -Variation!

Flächenladungen: $\delta W_e = \frac{1}{2} \int dA \delta(\sigma\varphi) = \frac{1}{2} \int dA \delta\sigma \varphi = \frac{1}{2} \int dA \sigma \delta\varphi$

Leiter: $\delta W_e = \frac{1}{2} \sum Q_i \delta\varphi_i = \sum \varphi_i \delta Q_i = \frac{1}{2} \sum Q_i \delta\varphi_i$

Spezialfälle:

① Verschiebung von Ladungen entlang der Leiteroberfläche

$$\delta Q_i = 0 (!) \leadsto \delta W_e = 0 \quad (\text{Verschiebung } \perp \text{ Kraft } (\parallel \vec{E}))$$

$\leadsto W_e$ nimmt Extremum an (i.a. Minimum) $\leadsto \text{Arbeit} = 0$

Thomson'scher Satz:

Ladungen verteilen sich so, daß W_e minimal wird.

② Transport von Ladungen zwischen Leitern

$$\delta Q_i \neq 0$$

$$\delta W_e = \sum Q_i \delta\varphi_i = \sum \varphi_i \delta Q_i$$

Beachte: $C_{ik} = \frac{\partial^2 W_e}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} \quad (\leadsto C_{ik} = C_{ki} \text{ symmetrisch})$

$$Q_i = \frac{\partial W_e}{\partial \varphi_i} = \sum C_{ik} \varphi_k$$

$$\delta W_e = \sum_i \frac{\partial W_e(\varphi_i)}{\partial \varphi_i} \delta\varphi_i \quad (\text{tot. Diff.})$$

6.5. Energie des stationären Magnetfeldes

$$W_m = \int dV \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \int dV \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} = \int dV \frac{1}{2\mu_0} (\vec{B} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}$$

$$\stackrel{\text{P.I.}}{=} \int dV \frac{1}{2\mu_0} \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \text{Oberflächenintegral} \rightarrow 0 \text{ für } V \rightarrow \infty \quad (\text{Felder fallen schnell ab})$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int dV \vec{j} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad \left(\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{j} + c \vec{\nabla} \times \vec{E} \right)$$

$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \int dV dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Lineare Leiter:

$$\int dV \vec{j} \rightarrow \int d\vec{r} I \quad \text{schleifen}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i \int_{L_i} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \phi_i$$

$$(\phi = \int d\vec{A}_F \cdot \vec{n} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{A})$$

$$\text{Allg: } \phi_i = \sum_k L_{ik} I_k$$

$$\leadsto W_m = \frac{1}{2} \sum_{ik} I_i L_{ik} I_k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} I_i I_k \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_i} d\vec{r}' \int_{L_k} d\vec{r}'' \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}''|}}_{L_{ik}} + \text{Selbstenergien (i=k)} \quad \downarrow \text{23.11.}$$

Selbstenergie einer Leitschleife

(endliche Dicke!)

$$W_m = \frac{L I^2}{2}$$

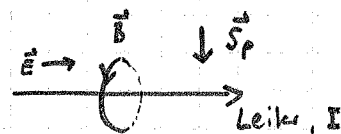
$$L = \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \int dV dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\begin{aligned} W_m &= \dots \\ &\downarrow \\ &= \frac{1}{I^2} \int dV \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} = \frac{1}{I^2} \int dV \vec{j} \cdot \vec{A} \\ &= \phi / I \end{aligned}$$

Landau Vol 8

6.6. Beispiele für die Energiestromdichte

a) Strom durch flachen gerader Leiter



$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu_0 I \quad \leadsto \text{radiales } \vec{B} \text{-feld} \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi r_\perp} I$$

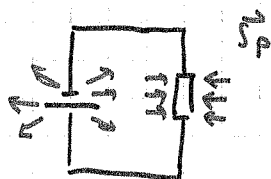
$$\text{Strom} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{Ohmsches Gesetz})$$

$$\leadsto \vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \leadsto \quad \vec{S}_p \text{ radial nach innen gerichtet!}$$

$$\text{Flächenintegral:} \quad \iint d\vec{A}_F \cdot \vec{S}_p = 2\pi r_\perp l S_p = 2\pi r_\perp l \frac{1}{\mu_0} E \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} = l E I$$

$$\leadsto \text{Leistung (Energie/Zeit)} \quad \underline{N = l E \cdot I = U \cdot I} \quad (\text{Ohmsche Verluste})$$

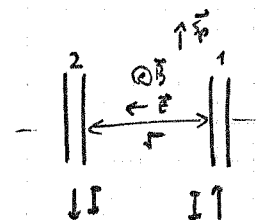
Leiterschleife:



(Argumente für Spannungsquelle analog, aber mit umgekehrtem V_z)

b) Doppelleiter

Energiestrom durch Querschnittsfläche



$$N = \int d\vec{A}_F \cdot \vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0} \int d\vec{A}_F (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\mu_0} \int d\vec{A}_F (\vec{\nabla} \varphi \times \vec{B}) = -\frac{1}{\mu_0} \int d\vec{A}_F \underbrace{\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{B})}_{\substack{\oint d\vec{r} \varphi \vec{B} = 0 \\ \text{im Unendlichen}}} + \frac{1}{\mu_0} \int d\vec{A}_F \varphi \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\mu_0 \vec{j}} \end{aligned}$$

$$\leadsto \underline{N = \int d\vec{A}_F \varphi \vec{j} = I (\varphi_1 - \varphi_2) = I \cdot U_{12}} \quad (\text{transportierte Leistung!!})$$

6.7. Energie einer ebenen harmonischen Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \operatorname{Re} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}_0 \perp \vec{k}, \quad E_0 \text{ reell}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}$$

$$\hat{k} = \vec{k} / k$$

Energiedichte:

$$\underline{w} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

$$= \left[\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_0^2 + \frac{1}{2\mu_0 c^2} (\hat{k} \times \vec{E}_0)^2 \right] \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$= \epsilon_0 \vec{E}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Achtung:

$\operatorname{Re} e^{i\dots}$ wichtig,

da $(\operatorname{Re} z)^2 \neq \operatorname{Re}(z^2)$

Nach räumlicher oder zeitlicher Mittelung: $\overline{\cos^2 \dots} = \frac{1}{2}$

$$\wedge \quad \underline{\overline{w}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}_0^2$$

Beobachtung: Mittelung äquivalent zu $\frac{1}{2} \vec{E} \vec{E}^* = \overline{(\operatorname{Re} \vec{E})^2}$

Energiesromdichte:

$$\vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}_0 \times (\hat{k} \times \vec{E}_0) \cos^2(\dots)$$

$$= \epsilon_0 c \left(\hat{k} \vec{E}_0^2 - \vec{E}_0 (\underbrace{\hat{k} \cdot \vec{E}_0}_{=0}) \right) \cos^2(\dots)$$

$$\underline{\vec{S}_p} = \epsilon_0 \hat{k} \epsilon_0 \vec{E}_0^2 \cos^2(\dots) = c \hat{k} \underline{w}$$

(Vgl. $\vec{j} = \rho \vec{v}$)

Mittelung:

$$\underline{\vec{S}_p} = c \hat{k} \underline{w} = c \hat{k} \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_0^2 = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \quad \left(= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\vec{E}^* \times \vec{B}) \right)$$

↑
nötig für zirkuläre Pol.

6.8. Impulsbilanz des elektromagnetischen Feldes

Kraft = Impulsänderung $\leadsto \vec{F}_L = \dot{\vec{p}}_{\text{mech}} = - \dot{\vec{p}}_{\text{elm}}$
↓ ↓
 Lorentzkraft Impuls des elmag. Feldes

Bilanzgleichung pro Volumen:

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \text{div } \hat{T} = - \vec{f}_L$$

Impulsdichte Impulstromdichte

elmag. Impulsenergierate $v_g = - \text{Lorentzkraftdichte} = - \vec{f}_L = - (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$

$\vec{g}$ & $\hat{T}$ hängen von Feldern ab — noch zu bestimmen.

Maxwells $-\vec{f}_L = - \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \times \vec{B}$

Umformen: $\dot{\vec{E}} \times \vec{B} = \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \dot{\vec{B}} = \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$

$\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{E} \cdot \vec{E}) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$
 ($\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$ analog)

Insgesamt in Komponenten: $(-\vec{f}_L)_k = \partial_t \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_0 \left(\frac{E^2}{2} \delta_{ik} - E_i E_k \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B^2}{2} \delta_{ik} - B_i B_k \right)$

da fehlende $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B}$ - Term ist Null wg $\text{div } \vec{B} = 0$!

↪ Impulsdichte

↗ Impulstromdichte

= Maxwell'scher Spannungstensor

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \\ \hat{T} &= \epsilon_0 \left(\frac{E^2}{2} \mathbb{1} - \vec{E} \otimes \vec{E} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B^2}{2} \mathbb{1} - \vec{B} \otimes \vec{B} \right) \\ v_g &= - \vec{f}_L \end{aligned}$$

$$\partial_t \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \hat{T} = - \vec{f}_L$$

Diskussion:

Impulsdichte

$$\vec{g} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S}_p = \frac{1}{c^2} \vec{S}_p$$

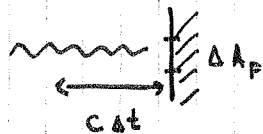
(allgemein-gültig für Feldtheorie bei Ausbreitung mit c)

Siehe Relativitätstheorie:

$$p = mc, \quad E = pc = mc^2$$

(Welle $|\vec{S}_p| = c \cdot w \rightarrow |\vec{g}| = \frac{w}{c}$)

Zusammenhang mit Strahlungsdruck: (Absorption einer el. mag. Welle)



Impulsübertrag: $\Delta \vec{p} = \vec{g} \Delta V = \vec{g} c \Delta t \Delta A_F$

Druck

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{|\Delta \vec{p}|}{\Delta A_F \Delta t} = c \cdot |\vec{g}| = w$$

Impulstendicht

Tensor T_{ik}

(k = Impulskomponente, i = Transportrichtung)

- $T_{ik} = T_{ki}$

(folgt u.a. aus Drehimpulsbilanz)

- $[T_{ik}] = [\vec{f}] [c] = \frac{[\vec{F}]}{[c]^2}$

Druck / Spannung

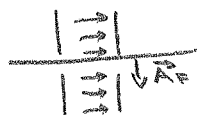
- Stationäres Feld $\vec{g} = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{T}}{\partial \vec{r}} = -\vec{f}_L$

$$\int dV \rightarrow \oint d\vec{A}_F \cdot \vec{T} = -\vec{F}_L \quad d\vec{F}_L = -d\vec{A}_F \cdot \vec{T}$$

Oberflächenkräfte

(Richtungskonvention: Fläche schließt Ströme / Ladungen ein, auf die die Kraft wirkt)

6.9. Beispiele für die Impulsbilanz



Anziehung wenn
Kontaktsatz horizontal
geführt wird



$$\vec{E} = E \hat{e}_x$$

a) Plattenkondensator

$$T_{ik} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ik} - \vec{E} \otimes \vec{E} \right)$$

$$T_{xx} = -\frac{\epsilon_0}{2} E^2, \quad T_{xy} = T_{xz} = T_{yz} = 0$$

$$T_{yy} = T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

Kraft auf linke Platte:

$$\underline{(\vec{F}_L)_x} = - \oint (d\vec{A}_F \cdot \hat{T})_x = - A_{F,x} T_{xx} = \frac{\epsilon_0}{2} A_F E^2 = \underline{\underline{\frac{QE}{2}}} \quad (\text{Anziehung!})$$

b) Lange Spule

Windungszahl

$$\vec{B} = \mu_0 I \frac{N}{L} \vec{e}_x \quad \text{auf Achse der Spule} \quad (\text{folgt aus } \oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I)$$

$$\leadsto T_{xx} = -T_{yy} = -T_{zz} = -\frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (\text{w.o.})$$



- Spule quer teilen, Kraft auf linken Teil:

$$\underline{(\vec{F}_L)_x} = - A_{F,x} T_{xx} = \frac{A_F}{2\mu_0} B^2 = \frac{A_F \mu_0 I^2 N^2}{2L^2} \quad (\text{Anziehung})$$

- Spule Längs teilen, Kraft auf unteren Teil:

$$\underline{(\vec{F}_L)_y} = - A_{F,y} T_{yy} = - \frac{R \cdot L B^2}{\mu_0} \quad (\text{Abstoßung})$$

Interpretation Feldlinien:

Zug || Feldlinien

Druck $\perp$ Feldlinien



c) Isotrope Strahlung in einem Hohlraum

Zeitl. Ortswittel

$$\hat{T} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ik} - \vec{E} \otimes \vec{E} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \vec{B}^2 \delta_{ik} - \vec{B} \otimes \vec{B} \right) = T_0 \delta_{ik}$$

$$s_p \hat{T} = 3T_0 = \epsilon_0 \left(\frac{3}{2} \vec{E}^2 - E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{3}{2} \vec{B}^2 - B^2 \right) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\leadsto \underline{T_0 = \frac{1}{3} w}, \quad \underline{\hat{T} = \frac{w}{3} \delta}$$

$$\text{Kraft auf Wand: } \Delta \vec{F}_e = - \oint d\vec{A}_F \cdot \hat{T} = - \Delta A_F \hat{T} = - \Delta A_F \frac{w}{3}$$

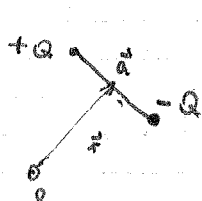
$$\leadsto \text{Strahlungsdruck } \underline{P = \frac{w}{3}} \quad (w \sim T^4 \leadsto P \sim T^4)$$

(Beachte: $P = w$ bei gerichtetem senkrechtem Einfall!)

7. Kraftwirkungen auf Ladungen und Ströme

$$\vec{F}_L = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

7.1. Elektrischer Dipol



Kraft $\vec{F} = Q \vec{E}(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}) - Q \vec{E}(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2})$ (= 0 für homogenes Feld)

Dipol limit $|\vec{a}| \rightarrow 0 \leadsto$ Entwickeln:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= Q \left[\vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2} (-\vec{a} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) \right] \\ &= Q (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) + o(a^3) \end{aligned}$$

$$\leadsto \boxed{\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}} \quad (\neq \vec{p} (\nabla \vec{E}))$$

Drehmoment: $\vec{M} = Q \left(\frac{\vec{a}}{2} \times \vec{E}(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}) + \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{E}(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}) \right) = Q \vec{a} \times \vec{E}$

$$\leadsto \boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

7.2. Magnetischer Dipol



Leiterschleife

Kraft:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}') \\ &= I \oint d\vec{r}' \times \vec{B}(\vec{r}') \quad (= 0 \text{ für homogenes Feld}) \\ &= I \oint d\vec{r}' \times \vec{B}(\vec{r} + \dots) \end{aligned}$$

Entwickeln
($\vec{r}' \ll r$)

$$\begin{aligned} &= I \oint d\vec{r}' \times \left[\vec{B}(\vec{r}) + \left(\vec{r}' \cdot \nabla \right) \vec{B}(\vec{r}) \right] \\ &= I \oint d\vec{r}' \cdot \left(\vec{r}' \cdot \nabla \right) \times \vec{B}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Integration

$$\oint d\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{a}) = \oint d\vec{r}' (\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{a} \stackrel{\text{siehe Kap 4.3}}{=} \frac{1}{2} \oint (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{a} + \frac{1}{2} \oint d(r'^2) \vec{a}$$

$$\downarrow$$

$$0 \quad = \quad \vec{A}_F \times \vec{a}$$

$$\leadsto \vec{F} = I \cdot \left(\vec{A}_F \times \nabla \right) \times \vec{B} = (\vec{m} \times \nabla) \times \vec{B} = \underbrace{\nabla (\vec{m} \cdot \vec{B})}_1 - \underbrace{\vec{m} (\nabla \cdot \vec{B})}_2$$

= 0 Maxwell

$$\leadsto \boxed{\vec{F} = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B})}$$

Umformen

$$\vec{m} \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B}) - (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}$$

für $\vec{r} \rightarrow 0$ aus der Leiter Quelle

~

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}} \quad (\text{nur für } \vec{j}_{\text{ext}} = 0)$$

(vgl. elekt. Dipol $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$)

↓ 30.11.

Drehmoment: $\vec{M} = \int dV' \vec{r}'' \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')]]$

$$= I \oint \vec{r}'' \times (d\vec{r}' \times \vec{B}(\vec{r}'))$$

$$= I \oint d\vec{r}' (\vec{r}'' \cdot \vec{B}(\vec{r}')) - I \oint (d\vec{r}' \cdot \vec{r}'') \vec{B}(\vec{r}')$$

Nähern w.o. $\vec{B}(\vec{r}') \approx \vec{B}(\vec{r})$

Umformen $\oint d\vec{r}' \cdot \vec{r}'' = \oint d\vec{r}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}) = \oint d\vec{r}' \cdot \vec{r}' = \oint \frac{1}{2} d(r'^2) = 0$

$$\oint d\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{a}) = \vec{A}_F \times \vec{a}$$

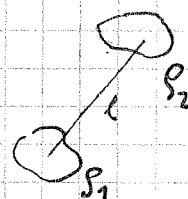
~

$$\boxed{\vec{M} = I \vec{A}_F \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{r})}$$

(vgl. el. Dipol $\vec{p} = \vec{p} + \vec{q}$)

7.3. Multipolentwicklung der elektrischen WW-Energie

$$W_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dV dV' \frac{(\rho_1(\vec{r}) + \rho_2(\vec{r})) (\rho_1(\vec{r}') + \rho_2(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



Wechselwirkungsenergie $1 \leftrightarrow 2$:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV dV' \frac{\rho_1(\vec{r}) \rho_2(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int dV \rho_2 \varphi_1$$

Uminterpretation: ρ_1 erzeugt äußeres Potential φ_1 , $\rho_2 \equiv \rho$

~

$$\underline{W = \int dV \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r})}$$

(Energie einer Ladungsverteilung ρ im äußeren Potential φ)

Jetzt Entwickeln:

(φ um Ursprung)

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(0) + \left(\vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \varphi \Big|_0 + \frac{1}{2} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi \Big|_0$$

$$\begin{aligned}
 W &= \int dV \rho(\vec{r}) \left[\varphi(0) + \left(\vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \varphi|_0 + \frac{1}{2} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi|_0 \right] \\
 &= Q \varphi(0) + \vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \varphi|_0 + \frac{1}{6} \sum_{i,j} (D_{ij} + \delta_{ij} \int dV \rho r^2) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi|_0
 \end{aligned}$$

$D_{ij} = \int dV \rho (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2)$

Umformen: $\delta_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \Delta \varphi = -\frac{\rho_1}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{für } r=0!$

→ Energie
$$W = Q \varphi(\vec{r}) + \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \varphi + \frac{1}{6} (\vec{\nabla} \cdot \hat{D} \cdot \vec{\nabla}) \varphi$$
 $\vec{r} = \text{Ort von } \rho(\vec{r})$

Verschieben der Ladungsverteilung $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta \vec{r}$ (Bezugspunkt für $\vec{p}$, $\hat{D}$ unverändert)

Arbeit $\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = -\delta W \quad \rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial \vec{r}}$

$$\varphi(0) \rightarrow \varphi(\delta \vec{r}) = \varphi(0) + \delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi + \frac{1}{2} \delta \vec{r}_i \delta \vec{r}_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial \vec{r}}$ Anschauen, was mit $\varphi \rightarrow \vec{E}$

$$Q \vec{E} + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + \frac{1}{6} (\vec{\nabla} \cdot \hat{D} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Drehen der Ladungsverteilung um $\vec{r}$ mit Winkel $\delta \vec{\alpha}$

Arbeit $\delta A = \vec{M} \cdot \delta \vec{\alpha} = -\delta W, \quad \vec{M} = -\frac{\partial W}{\partial \vec{\alpha}}$

Anpassen $\delta Q = 0, \quad \delta \vec{p} = \delta \vec{\alpha} \times \vec{p}, \quad \delta \hat{D} = \delta \vec{\alpha} \times \hat{D} - \hat{D} \times \delta \vec{\alpha}$

(Dipol: $\vec{p} = Q \vec{a}, \quad \delta \vec{a} = \delta \vec{\alpha} \times \vec{a}$ 
 Quadrupol: $\hat{D} = \vec{A} \otimes \vec{b}, \quad \delta \vec{A} = \delta \vec{\alpha} \times \vec{A}, \quad \delta \vec{b} = \delta \vec{\alpha} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \delta \vec{\alpha}$
 $\delta \hat{D} = \delta \vec{A} \otimes \vec{b} + \vec{A} \otimes \delta \vec{b} = \delta \vec{\alpha} \times \vec{A} \otimes \vec{b} - \vec{A} \otimes \vec{b} \times \delta \vec{\alpha}$)

$$\begin{aligned}
 W + \delta W &= Q \varphi + (\vec{p} + \delta \vec{p}) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{6} (\vec{\nabla} \cdot (\hat{D} + \delta \hat{D}) \cdot \vec{\nabla}) \varphi \\
 \delta W &= \delta \vec{p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{6} (\vec{\nabla} \cdot \delta \hat{D} \cdot \vec{\nabla}) \varphi \\
 &= -(\delta \vec{\alpha} \times \vec{p}) \cdot \vec{E} - \frac{1}{6} \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{\alpha} \times \hat{D} - \hat{D} \times \delta \vec{\alpha}) \cdot \vec{E}
 \end{aligned}$$

→ Drehmoment
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \hat{D} \times \vec{E}$$

Martin gibt $-\frac{1}{6} \vec{\nabla} \times \hat{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{6} \vec{\nabla} \cdot \hat{D} \times \vec{E}$

Achtung: Gleiche Prozedur für magnetischen Fall (Kraft/Drehmoment aus Änderung der Feldenergie) liefert falsches $V_{\vec{z}}$! (Ursache: zusätzliche Energie aus Spannungsquellen durch Induktion)

8. Felder zeitabhängiger Strom- und Ladungsverteilungen

Ist allgemeine Lösung von

$$\begin{array}{ll} \text{div } \vec{B} = 0 & \epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho \\ \text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 & \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{j} \end{array}$$

8.1. Viererpotential

$\text{div } \vec{B} = 0$ wird erfüllt mit $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

$\text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$ führt auf $\text{rot } (\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0$.

Dies kann erfüllt werden (siehe E. statik) mit $\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\text{grad } \varphi$

→ Felder können ausgedrückt werden durch Vierpotential $(\varphi, \vec{A})$:

$$\begin{array}{l} \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \\ \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \dot{\vec{A}} \end{array}$$

→ i.a. 4 Felder zu bestimmen

Einsetzen in Maxwell:

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$$

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$-\Delta \varphi - \text{div } \dot{\vec{A}} = \rho / \epsilon_0$$

$$\text{rot } \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \text{grad } \dot{\varphi} + \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{\nabla} \varphi = \mu_0 \vec{j}$$

$$\square \varphi - \partial_t \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\square \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{j}$$

↓ 2/2.

Eichinvarianz: Potentiale nicht eindeutig

Trafo

$$\begin{array}{l} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \chi \\ \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \partial_t \chi \end{array}$$

→

$$\vec{B} = \vec{B}' \quad (\text{rot grad} = 0)$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \text{grad } \partial_t \chi - \partial_t \text{grad } \chi = \vec{E}$$

Gleichzeitige Änderung von $\vec{A}$ und χ läßt Felder unverändert.

Eichtrafo hat eine willkürliche skalare Fkt χ → Forderung daß eine skalare Bedingung enthalten.

Hier günstig

Lorentz-Eichung:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

(invariant unter Lorentz-
Trafo $\rightarrow$ geeignet für
relativistische Probleme)

Mit Lorentz-Eichung lauten die Gleichungen für die Felder:

$$\square \varphi = \rho / \epsilon_0, \quad \square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Statische Probleme: $\partial_t \rightarrow 0, \square \rightarrow \Delta$

$$-\Delta \varphi = \rho / \epsilon_0$$

E-Statik, Kap 3, $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$

$$-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Stat. Ströme, Kap 4, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Wichtige Eichungen:

a) Lorentz $\frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \operatorname{div} \vec{A} = 0 \leadsto \square \varphi = \rho / \epsilon_0, \square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

b) Coulomb $\operatorname{div} \vec{A} = 0 \leadsto -\Delta \varphi = \rho / \epsilon_0, \square \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2 \partial \vec{r}}$
(für E-Statik und Korrekturen)

c) Transversale Wellen $\varphi = 0 \leadsto \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}, -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2 \partial \vec{r}} = \rho / \epsilon_0$

(*) Lorentz-Eichung fixiert Potentiale noch nicht, Uneichungen mit $\square \chi = 0$ noch möglich.

8.2. Retardierte Potentiale

Inhomogene ^{lineare!} Dgl der Form $\square u = \rho$

kann gelöst werden mittels Greenscher Fkt $\square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$

Dazu Fourier-Transformation $t \rightarrow \omega$:

$$u(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Wegen Translationsinvariant wird $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ nur von $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ abhängen;
wg. Rotationsymmetrie nur von $|\vec{R}|$.
 $\tau = t - t'$

Dann wird aus $\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta\right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \vec{R}^2} - \frac{1}{c^2} (i\omega)^2\right) G(\vec{R}, \omega) = -4\pi \delta(\vec{R})$$

$c \equiv k$, Kugelkoordinat:
$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} R G_h(R) + k^2 G_h(R) = -4\pi \delta(\vec{R})$$

Für alle $\vec{R} \neq 0$ haben wir die homogene Gleichung $\frac{d^2}{dR^2} (R G_h) + k^2 (R G_h) = 0$,

mit der Lösung
$$R G_h(R) = A e^{ikR} + B e^{-ikR} \quad (k, R \text{ Skalar!})$$

Die Inhomogenität $\delta(\vec{R})$ ist wichtig nahe $\vec{R} = 0$. Dort ist der $k^2 R G_h$ -Term vernachlässigbar wegen $kR \ll 1$. Die Gleichung reduziert sich damit auf die Poisson-Gl. $\Delta G_h(\vec{R}) = -4\pi \delta(\vec{R})$, d.h.

$$\lim_{kR \rightarrow 0} G_h(\vec{R}) = \frac{1}{R}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung für G :

$$G_h(R) = A G_h^+(R) + B G_h^-(R), \quad G_h^\pm(R) = \frac{e^{\pm i k R}}{R}, \quad A+B=1$$

Jetzt Fourier-Transform zurück $\omega \rightarrow t$:

$$G^\pm(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm i k R}}{R} e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (k = \frac{\omega}{c})$$

$$= \frac{1}{R} \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right)$$

oder

$$G^\pm(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{\delta\left(t' - \left(t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Der Unterschied zwischen G^+ und G^- liegt in der Condition in der Zeit:

G beschreibt Reaktion des Systems bei $(\vec{r}, t)$ auf Störung (Inhom.) bei $(\vec{r}', t')$.

Kausalität erfordert $G(t < t') = 0$. δ -Fkt $\neq 0$ bei $t' = t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$.

$\hookrightarrow$ Kausalität wird erfüllt von G^+ („retardierte Greensche Fkt“): Wirkung nach

Ursache; breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus: $\tau = R/c$.

G^- heißt „avancierte Greensche Funktion“

Die Lösung der inhomogenen Dgl. $\square u = \rho$

ist damit

$$u(\vec{r}, t) = u_0(\vec{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \int dV' dt' G^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \rho(\vec{r}', t')$$

↑
homogene Lsg

Jetzt zurück zu $\square \varphi = \rho/\epsilon_0$, $\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$. Für eine räumlich begrenzte Verteilung von Quellen (und Randbed. Felder $\rightarrow 0$ im Unendlichen) brauchen wir $\varphi_0 = 0$, $\vec{A}_0 = 0$ (homogene Lsg).

→ Allg. Lsg. der Maxwell-Gl. lauten:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

„Retardierte Potentiale“

Interpretation klar: $\rho, \vec{j}$ als Ursache, $\varphi, \vec{A}$ als Wirkung, $\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ als Laufzeit

Rechenübung:

- Einsetzen $\square \varphi = \rho/\epsilon_0$, $\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$ erfüllt.
- Lorentz-Eichung $\frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \operatorname{div} \vec{A} = 0$ erfüllt.
(Dies führt auf $\vec{j} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$!)

Bem.:

Avancierte Potentiale mit G^- , d.h. $t' = t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$, erfüllen auch die inhom. Wellengl. $\square \varphi = \rho/\epsilon_0$, $\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$.

(Mathematisch: Wellengl. enthält c quadratisch, Potential nur linear)

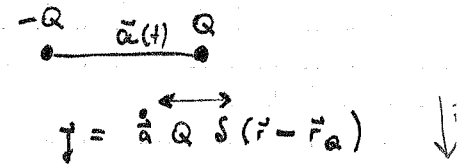
Diese Lösung ist akausal.

Wahl von G^+ zeichnet eine Zeitrichtung aus!

8.3. Hertzscher Dipol

Konkretes Beispiel für zeitabhängige Quellenverteilung
mit $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(t) \delta(\vec{r})$ ($\sim$ Antenne)

Allgemein gilt $\vec{j}(t) = \int dV \vec{j}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{p}}$



Dipolmit $a \rightarrow 0$ $\vec{j} = \dot{\vec{p}} \delta(\vec{r})$ (!)

denn:

$$\dot{\vec{p}} = \int dV \vec{r} \dot{\rho} \stackrel{\text{Kont. gl.}}{=} - \int dV \vec{r} \operatorname{div} \vec{j} \stackrel{\text{p. F.}}{=} \int dV (\vec{j} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + \text{Oberflächenintegral} \rightarrow 0 \text{ für } V \rightarrow \infty$$

$$\stackrel{\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 1}{=} \int dV \vec{j} = \vec{j}$$

Ziel: Berechnen der Felder (el. mag. Abstrahlung) des oszillierenden Dipols

Ret. Pot: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\delta(\vec{r}') \vec{j}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r}$

φ entweder Ableiten aus Ladungsverteilung zu $\vec{j}$ oder aus Lorentz-Eichung.

$$\partial_t \varphi = -c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r}$$

$$\sim \varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} + \text{zeitunabh. Pot}$$

Felder: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \dot{\vec{A}}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}}{r} \Big|_{\text{ret}}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \left(\frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} + \frac{\ddot{\vec{p}}}{cr} \right)_{\text{ret}}$$

$$\sim \vec{B} = \frac{1}{r^2} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^2} \times \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{c} + \frac{\dot{\vec{p}}}{r} \right)_{\text{ret}}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2} - \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{c^2 r^2} + \frac{\dot{\vec{p}}}{cr} - 3 \frac{(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{cr^3} + \frac{\vec{p}}{r^2} - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^4} \right)$$

Bis jetzt war Zeitabhängigkeit allgemein. Spezialfälle:

8-6

① $\partial_t = 0$

Statischer Dipol

$\vec{B} = 0$

$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\vec{p} - \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} \right)$

② $\vec{p} \sim e^{-i\omega t}$

Harmonische Schwingung

$\partial_t = -i\omega$, $\frac{1}{c} \partial_t = -i\omega/c = -i \frac{2\pi}{\lambda}$ ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

Abstandsabhängigkeiten der Beiträge:

$\vec{B} \sim -\frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}}{4\pi r^2} \times \left(\sigma(\frac{\vec{p}}{\lambda}) + \sigma(\frac{\vec{p}}{r}) \right)$

$\vec{E} \sim -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\sigma(\frac{\vec{p}}{\lambda^2}) + \sigma(\frac{\vec{p}}{r\lambda}) + \sigma(\frac{\vec{p}}{r^2}) \right)$

Nahfeld $r \ll \lambda$:

$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \left(\ddot{\vec{p}} \times \frac{\vec{r}}{r} \right)_{\text{ret}}$

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right)_{\text{ret}}$

Außerdem: $\vec{p}_{\text{ret}} \sim e^{-i\omega(t-r/c)} = e^{-i\omega t} e^{i2\pi \frac{r}{\lambda}}$
 $1 + 2\pi i \frac{r}{\lambda} + \dots$

$\frac{r}{\lambda} \ll 1 \leadsto e^{i2\pi \frac{r}{\lambda}} \approx 1 \hat{=} \text{Verzicht auf Retardierung}$

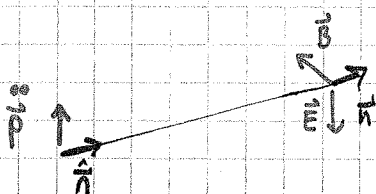
Fernfeld $r \gg \lambda$

$\left(\frac{\vec{r}}{r} = \hat{n} \right)$

$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \left(\ddot{\vec{p}} \times \hat{n} \right)_{\text{ret}}$

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left((\ddot{\vec{p}} \cdot \hat{n}) \hat{n} - \ddot{\vec{p}} \right)_{\text{ret}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\ddot{\vec{p}} \times \hat{n} \right)_{\text{ret}} \times \hat{n}$

$\vec{E}(\vec{r}, t) = c \vec{B} \times \hat{n}$



Ausbreitung in Richtung $\hat{n}$ radial als transversale Welle.

$e^{-i\omega(t-r/c)} = e^{i(kr-\omega t)}$, $k = \omega/c$.

$|\vec{E}|$ und $|\vec{B}|$ fallen nur mit $1/r$ ab //

8.4. Energieabstrahlung eines Hertzischen Dipols

Energiedichte:

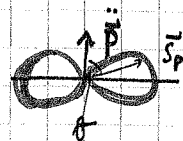
$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad \vec{E} = c \vec{B} \times \hat{n} \quad \vec{B}^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Energiedichte:

$$\vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{\mu_0} ((\vec{B} \times \hat{n}) \times \vec{B}) = \frac{c}{\mu_0} (\hat{n} B^2 - \vec{B} (\hat{n} \cdot \vec{B})) = c \hat{n} B^2$$

~

$$\vec{S}_p = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \hat{n})^2}{r^2} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \vartheta}{r^2}$$



! Stärkste Ausstrahlung $\perp$ Dipolachse !

Energiestrom in Raumwinkel element:

(Energiestrom = Energie/Zeit = Leistung)

$$\begin{aligned} & \text{Diagram: A small cone representing a solid angle element } \Omega. \\ & A \sim r^2 \quad |\vec{S}_p| \cdot A \sim \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \sim 1 \quad \text{wg. } |\vec{E}|, |\vec{B}| \sim \frac{1}{r} \\ & \sim |\vec{E}|, |\vec{B}| \sim \frac{1}{r} \quad \text{folgt aus Energieerhaltung!} \end{aligned}$$

Frequenzabhängigkeit der abgestrahlten Leistung

$$|\vec{S}_p| \sim |\ddot{\vec{p}}|^2 \sim p^2 \omega^4$$

Charakteristisch für Dipolstrahlung

z.B.

Rayleigh-Streuung

: erzwungene Schwingung eines Dipols (z.B. optisch)



Sonnenlicht in Atmosphäre: Streuung stark für blauen Licht

~ Himmel blau (indirektes Streulicht)

~ Sonne am Abend rot (blauer Anteil weggestreut, da Luftdicht)

Abgestrahlte Leistung

$$N = \iint d\vec{A}_F \cdot \vec{S}_p = \int d\Omega r^2 \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \ddot{p}_{\text{ret}}^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} = \frac{\mu_0 \ddot{p}_{\text{ret}}^2}{(4\pi)^2 c} \int d\Omega \sin^2 \vartheta$$

$$\text{Integral: } \int d\Omega \sin^2 \vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \sin^2 \vartheta = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) = 2\pi \left(2 - \frac{2}{3}\right)$$

~

$$N = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{4\pi c} \ddot{p}_{\text{ret}}^2$$

Zeitmittel:

$$\overline{N} = \frac{\mu_0 \omega^4 \overline{p_0^2}}{12\pi c}$$

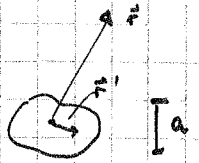
$$\left(\overline{\ddot{p}^2} = \frac{1}{\omega^4 \overline{p_0^2} \overline{\cos^2 \omega t}} \right) \quad \vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$$

8.5. Strahlungsfeld einer räumlich begrenzten Quellenverteilung

(Ziel: Verallgemeinerung der Gl. für Hertzschen Dipol für bel. Quellen)

Allg:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



Fernfeld:

$$r \gg a, |\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$$

(Bei Hertzchen Dipol war $a \rightarrow 0$.)

Entwickeln:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \approx \frac{1}{r} \quad (\approx \text{Dipolnäherung})$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} + \dots \approx r - \hat{n} \cdot \vec{r}' \quad (\hat{n} = \vec{r}/r)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int dV' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{c})}_{= \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}$$

(Vgl. Hertzchen Dipol $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})$)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{j}}(t - \frac{r}{c}, \vec{n})}{r} \quad (r \gg a) \quad \downarrow \text{g.R.}$$

 $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r} f(t - \frac{r}{c}, \vec{n}) \right] = \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\hat{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \right) \right] \left(\frac{1}{r} f \right) \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} f \right)$$

Wie Hertz: $r \gg \lambda$

$$O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} \vec{n} \times \dot{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\dot{\vec{j}} \times \vec{n}}{r}$$

ML:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{j} = 0 \text{ außerhalb Quelle}$$

$$\vec{E} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \times c^2 \vec{B}$$

$$\vec{E} = c \vec{B} \times \vec{n} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\dot{\vec{j}} \times \vec{n}) \times \vec{n}}{r}$$

Transversale Welle
E, B
"Aspekt mit $\frac{1}{r}$

(Korrekturen aus höheren Termen fallen schneller als $1/r$ ab!)

Weiter:

$$\vec{J}_p = \frac{1}{\mu_0} (\vec{m} \times \vec{B}) = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{(\vec{J} \times \vec{r})^2}{r^2}$$

Vgl:

Hertzischer Dipol

allg

$$\vec{p}_{\text{ret}} = \int dV' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})$$

$$\vec{q} = \int dV' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{c})$$

Mit $\vec{j} \leftrightarrow \vec{q}$ sind alle

Fernfeld-Formeln identisch!

Laufzeit innerhalb der Quelle

8.6. Multipolentwicklung des Fernfeldes

Bis jetzt Zeitabhängigkeit allgemein. Jetzt:

$$\vec{j} \sim e^{-i\omega t} \quad \vec{j}(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{c}) \sim e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} e^{-\frac{i\omega}{c} \hat{n} \cdot \vec{r}'}$$

Fernfeldentwicklung ($r \gg a, \tau \gg \lambda$) mit zusätzlicher Annahme $\lambda \gg a$ (kleine Quelle).

$$\text{Also: } \frac{\omega}{c} \hat{n} \cdot \vec{r}' \sim \frac{\omega}{c} a = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1 \quad (\text{äquivalent: Laufzeit in Quelle} \ll \text{Periodendauer})$$

$$\vec{j}(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{c}) \approx \vec{j}(t - \frac{r}{c}) + \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{c} \partial_t \vec{j}(t - \frac{r}{c}) + \dots$$

$$\vec{q} = \underbrace{\int dV' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}_{\vec{p}_{\text{ret}}} + \frac{1}{c} \partial_t \int dV' (\hat{n} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})$$

$$\begin{aligned} \text{Umformen: } \int dV' (\hat{n} \cdot \vec{r}') \vec{j} &= \frac{1}{2} \int dV' (\hat{n} \vec{r}') \vec{j} - (\hat{n} \vec{j}) \vec{r}' + \frac{1}{2} \int dV' (\hat{n} \cdot \vec{r}') \vec{j} + (\hat{n} \vec{j}) \vec{r}' \\ &= \hat{n} \times \underbrace{\frac{1}{2} \int dV' (\vec{r}' \times \vec{j})}_{\vec{m}} + \frac{1}{2} \hat{n} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int dV' \vec{r}' \vec{j}}_{\vec{p}_{\text{ret}}} \quad \text{S. 8-36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{denn: } \vec{U} &= \int dV \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{r}'}_{-\vec{r}' \cdot \vec{j}} (3\vec{r}' \cdot \vec{r}' - r^2) \stackrel{\text{P.I.}}{=} \int dV (\vec{j} \cdot \vec{r}') (3\vec{r}' \cdot \vec{r}' - r^2) \\ &= \int dV (3\vec{j} \cdot \vec{r}' + 3\vec{r}' \cdot \vec{j} - 2r^2 (\vec{j} \cdot \vec{r}')) \quad (*) \end{aligned}$$

Wir definieren $\vec{D} = \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\vec{r} \otimes \vec{r}}{3} = \int dV \rho \vec{r} \otimes \vec{r}$

$\vec{D} = \int dV (3 \vec{j} \otimes \vec{r} + 3 \vec{r} \otimes \vec{j})$

(*) in Komponenten (Tensor 3. Stufe):

$$\begin{aligned}
 \left[\vec{j} \cdot \vec{\nabla} (3 \vec{r} \otimes \vec{r} - \epsilon_0 r^2) \right]_{ij} &= j_k \partial_k (3 r_i r_j - \delta_{ij} r_e r_e) \\
 &= j_k (3 \delta_{ik} r_j + 3 r_i \delta_{jk} - \delta_{ij} 2 r_e \delta_{ek}) \\
 &= 3 j_i r_j + 3 r_i j_j - \delta_{ij} 2 j_k r_k
 \end{aligned}$$

Außerdem brauchen wir:

$$\left[\left(\vec{m} \times \vec{s}_1 \right) \times \vec{s}_2 \right] \times \vec{s}_2 = \left[\vec{s}_2 \left(\vec{m} \cdot \vec{s}_2 \right) - \vec{m} \left(\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_2 \right) \right] \times \vec{s}_2 = - \vec{s}_2 \times \vec{s}_2$$

Und:

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{D} \times \vec{s}_2 = \vec{s}_1 \cdot \vec{E} \times \vec{s}_2 + \underbrace{\left(\vec{s}_1 \cdot \vec{j} \times \vec{s}_2 \right)}_{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \cdot \vec{r}_0} \frac{\epsilon_0}{3} = \vec{s}_1 \cdot \vec{E} \times \vec{s}_2$$

$$\vec{p} = \left(\vec{p}^0 + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{p}^0 + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{D}} \right)_{\text{ret}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \left(\vec{p}^0 \times \hat{n} + \frac{1}{c} (\ddot{\vec{x}} \times \hat{n}) \times \hat{n} + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{D}} \times \hat{n} \right)_{\text{ret}}$$

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left((\vec{p}^0 \times \hat{n}) \times \hat{n} - \frac{1}{c} (\ddot{\vec{x}} \times \hat{n}) + \frac{1}{6c} (\ddot{\vec{D}} \times \hat{n}) \times \hat{n} \right)_{\text{ret}}$$

$(a/\lambda \ll 1)$

el. Dipol

mag. Dipol

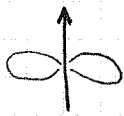
el. Quadrupol

Entwicklung in a/λ :

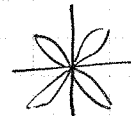
Felder von mag. Dipol & el. Quadrupol kommen eine
Ordnung später als el. Dipol, sind also um $\frac{a}{\lambda}$ kleiner !!
(Energien damit um $\frac{a^2}{\lambda^2}$ kleiner)

Richtungsabh. der Felder (und damit auch von $|\vec{S}_P|$):

Dipol



Quadrupol



od.



↓ 14.12.05

Die obigen Formeln sind im Prinzip auch anwendbar auf

Eine bewegte Punktladung:

$$a \ll \lambda \quad \text{Zeitskala } \tau = \frac{a}{v} \quad ; \quad \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad \hat{=} \quad \frac{v}{c} \ll 1 \quad \left(\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \right)$$

Bsp: Atom

$$a \sim 10^{-10} \sim 10^{-9} \text{ m}$$

$$\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ m (opt)}$$

$$\sim \frac{a}{\lambda} \sim 10^{-3}$$

8.7. Strahlung einer bewegten Punktladung

Retardierte Potentiale

$$\left(\frac{\varphi}{A}\right)(\vec{r}, t) = \left(\frac{1/\epsilon_0}{\mu_0}\right) \int dV' \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\frac{\rho}{j}\right)(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})$$

für Spezialfall einer
bewegten Punktladung

$$\rho(\vec{r}, t) = Q \delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$$

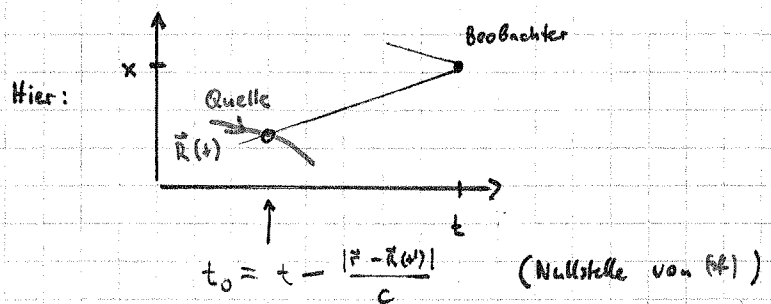
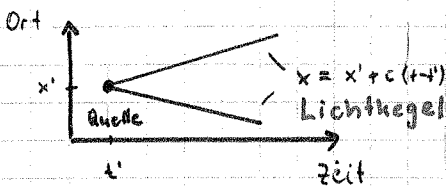
$$\vec{j}(\vec{r}, t) = Q \dot{\vec{R}}(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$$

Einsetzen

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int dV' dt' \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{R}(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c})$$

Anschaulich: Ausbreitung mit c



Weiter mit Rechnung:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|df/dx|_{x=x_i}} \quad (x_i \equiv \text{Nullstellen von } f)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t_0)|} \frac{1}{1 - \frac{\dot{\vec{R}}(t_0) \cdot (\vec{r} - \vec{R}(t_0))}{c |\vec{r} - \vec{R}(t_0)|}}$$

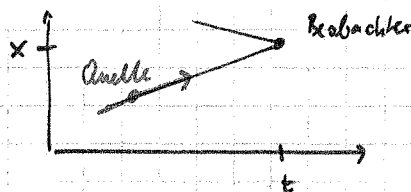
$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}| - \frac{\dot{\vec{R}}}{c} \cdot (\vec{r} - \vec{R})} \right]_{\text{ret}} \quad \vec{r}'' = \vec{r} - \vec{R} \quad \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r'' - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}''}{c}} \right)_{\text{ret}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \left[\frac{\dot{\vec{R}}}{|\vec{r} - \vec{R}| - \frac{\dot{\vec{R}}}{c} \cdot (\vec{r} - \vec{R})} \right]_{\text{ret}} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \left(\frac{\vec{V}}{r'' - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}''}{c}} \right)_{\text{ret}}$$

Lichtkegel
t_0

Liénard-Wiechert-Potentiale

Achtung: Divergenz (Nenners $\rightarrow 0$)
falls Quelle mit c
auf Betrachter
zubewegt wird



8.8. Strahlungsbremung

(hier nur nichtrelativistische, siehe LL Bd 3)

Eine Punktladung auf Bahn $\vec{R}(t)$

$$\rho = Q \delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$$

$$\vec{j} = Q \dot{\vec{R}} \delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$$

$$Q = \int dV \rho = Q$$

$$\vec{p} = \int dV r \rho = Q \vec{R}(t)$$

$$\vec{L} = \frac{1}{2} \int dV \vec{r} \times \vec{j} = \frac{1}{2} \int dV \vec{r} \times \dot{\vec{R}} Q \delta(\vec{r} - \vec{R}(t)) = \frac{Q}{2} \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{D} = 3 \int dV (\vec{r} \otimes \vec{j} + \vec{j} \otimes \vec{r}) = 3Q (\vec{R} \otimes \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}} \otimes \vec{R})$$

(! Einzelne bewegte Punktladung hat Multipolmomente!)

Dipolnäherung für abgestrahlte Leistung (Kap 8.4):

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\vec{p}}^2 = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \dot{\vec{v}}^2 \quad (= \propto \dot{\vec{v}}^2) \quad (\text{Gültig für } v/c \ll 1, \text{ siehe Dipol})$$

($\leadsto$ Energieabstrahlung für $\dot{\vec{v}} \neq 0$)

Diese abgestrahlte Energie geht dem Teilchen verloren! ($\leadsto$ Bremskraft)

$$\Delta W_{\text{kin}} = \int dt N = -\Delta W_{\text{mech}} = -\int \vec{F}_S \cdot \vec{v} dt$$

$$\propto \int dt \dot{\vec{v}}^2 = -\int dt \vec{v} \cdot \vec{F}_S$$

$$\stackrel{\text{P.I.}}{=} -\alpha \int dt \ddot{\vec{v}} \vec{v} + \alpha \vec{v} \dot{\vec{v}} \Big|_0^{t_1}$$

Randterm verschwindet für period. Bewegung, siehe Diskussion LL

$$\vec{F}_S = \alpha \ddot{\vec{v}} = \frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{R}}$$

(anwendbar, falls $\vec{F}_S$ klein korrelativ ist)

Bsp

Oszillierende Ladung

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \cos \omega t, \quad \ddot{\vec{v}} = -\vec{v} \omega^2 \quad \leadsto \vec{F}_S \updownarrow \vec{v}$$

Drehbewegung

$$\dot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad \ddot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

Achtung

Freie Bahn

$$m \ddot{\vec{R}} = \alpha \ddot{\vec{R}} \quad \leadsto \quad \vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\gamma_A t}$$

Umphysikalische Selbstbeschleunigung!

9. Elektromagnetische Felder in Substanzen

Bisher: „Mikroskopische“ Maxwellgleichungen,

$\vec{J}$ und $\vec{j}$ enthalten alle Quellen (dabei Mittelung auf atomarer Skala vorausgesetzt)

Jetzt: „Mikroskopische“ Maxwellgleichungen,

dabei soll durch „größere“ Mittelungsverfahren zwischen (externen) makroskopischen Quellen und materialigenen Quellen (Polarisationsladungen, Abschirmströme) unterschieden werden

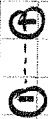
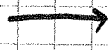
Ausführliche Diskussion siehe Jackson Kap 7

9.1. Elektrische Polarisation

$$\vec{J} = \vec{J}_0 + \vec{J}_p$$

$\vec{J}_0$ makroskopisch
 $\vec{J}_p$ Polarisationsladung, durch äußeres Feld induziert (im Exp. nicht bekannt)

Induzierte Ladungen:



Dielektrizität



Paraelektrizität



Influenzladungen in Leiter

$\vec{J}_p$ durch Ladungstrennung:

$$\vec{J}_p(t=0) = 0 \rightarrow \vec{J}_p(t) \neq 0$$

$$Q_p = 0 \rightarrow \int dV \vec{J}_p = Q_p = 0 \quad (\text{Ladungserhaltung})$$

$$\vec{J}_p + \text{div } \vec{j}_p = 0$$

$$\vec{J}_p = -\vec{\nabla} \cdot \underbrace{\int_0^t dt' \vec{j}_p(t')}_{=\vec{P}} + \underbrace{\vec{J}_p(0)}_{=0}$$

Elektrische Polarisation

$$\vec{P} = \int \vec{j}_p dt$$

$$\underline{\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}}, \quad Q_p = -\int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\oint d\vec{A}_p \cdot \vec{P} \underset{V \rightarrow 0}{=} 0$$

Nun gilt: $\int dV \vec{j}_p = \int dV \dot{\vec{P}} =: \dot{\vec{P}}_p$

Vir. u. w. (Kap 8): Strom $\sim \dot{q}_L$ Dipolmoment. Also

"Polarisationsdipol"

$$\underline{\vec{P}_p = \int dV \vec{P}}, \quad \vec{P} \text{ ist Dipoldichte!}$$

↓ 16.12.

Elektrisches Potential durch Polarisation:

$$\varphi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{P}(\vec{r}')$$

$$\stackrel{\text{p.z.}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Vgl. mit Dipolpotential: $\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$

$\vec{P}$ kann als Dipoldichte interpretiert werden: $\vec{P}(\vec{r}') dV' = d\vec{p} !$, $\underline{\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}}$

(Mikroskopisch: endliche Dipolgröße $\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \vec{p}_i$)

In Maxwell:

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho = \rho_0 + \rho_p = \rho_0 - \operatorname{div} \vec{P}$$

$$\sim \boxed{\operatorname{div} (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) = \rho_0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_0}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{"elektrische Verschiebung" (Hilfsfeld!)}$$

9.2. Magnetisierung

$$\vec{J} = \underbrace{\vec{J}_k + \vec{J}_e}_{\vec{J}_0} + \vec{J}_p + \vec{J}_m$$

Konvektion $\rho \vec{v}$ (bewegtes Material) Leitungsstrom Polarisationsstrom $\dot{\vec{P}}$ durch Ladungstrennung Ströme ohne Ladungstrennung

Kontinuitätsge. $\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$

$$\dot{\rho}_0 + \dot{\rho}_p + \operatorname{div} \vec{J}_0 + \operatorname{div} \vec{J}_p + \operatorname{div} \vec{J}_m = 0$$

Einzelne Ladungsorte erfüllen Kontinuitätsgleichungen jeweils separat!

$$\dot{\rho}_0 + \operatorname{div} \vec{J}_0 = 0; \quad \dot{\rho}_p + \operatorname{div} \vec{J}_p = 0$$

Damit

$$\operatorname{div} \vec{J}_m = 0 \quad (\text{Keine Ladungsträger!})$$

$\leadsto$

$$\vec{J}_m =: \operatorname{rot} \vec{M} \quad \vec{M} \equiv \text{Magnetisierung}$$

Resultierendes Vektorpotential:

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Vgl. mit Dipolpotential: $\vec{A}(\vec{r}) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{r}$

$\leadsto \vec{M}$ kann als mag. Dipoldichte interpretiert werden $\vec{M}(\vec{r}') dV' = d\vec{m}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \quad \vec{M} \text{ mag. Dipoldichte}$$

In Maxwell

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{J} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{J}_0 + \dot{\vec{P}} + \operatorname{rot} \vec{M} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$$

$$\leadsto \operatorname{rot} \left(\underbrace{\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}_{\vec{H}} \right) = \underbrace{\vec{J}_0 + \partial_t (\epsilon_0 \vec{E} + \dot{\vec{P}})}_{\vec{J}}$$

$\vec{H}$ - Hilfsfeld!

Insgesamt:

$$\begin{array}{ll} \text{div } \vec{B} = 0 & \text{div } \vec{D} = \rho_0 \\ \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 & \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_0 \end{array}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{bzw.} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$\vec{P}$ und $\vec{M}$ beschreiben Materialeigenschaften.

9.3. Materialgesetze

$\vec{P}$, $\vec{M}$, $\vec{j}_L$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ hervorgerufen.

$$\begin{array}{l} \text{l. a.} \\ \vec{j}_L = \vec{j}_L(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{B}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{M} = \vec{M}(\vec{E}, \vec{B}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \vec{j}_L = \vec{j}_L(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{M} = \vec{M}(\vec{E}, \vec{B}) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{material spezifisch,} \\ \text{einige Einschränkungen durch} \\ \text{Thermodynamik} \\ \text{weitere Abh. (Temp, Druck, ...)} \end{array}$$

Häufig: einfache Gesetze (aus Exp oder theor. Modellen)

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \vec{j}_L = \vec{j}_L(\vec{E}) = \sigma \vec{E} \\ 2) \quad \vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} & (\chi \equiv \text{Suszeptibilität}) \\ 3) \quad \vec{M} = \vec{M}(\vec{B}) = \chi_m' \vec{B} / \mu_0 \end{array}$$

↑ Taylor für schwache Felder (schwach $\equiv$ klein gegen inneratomare Kräfte)

Physikalisch:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \text{Ohmsches Gesetz} & I = A_F \vec{j} = A_F \sigma E = A_F \frac{U}{L} = \frac{U}{R} \quad ; \quad R = \frac{L}{A_F \sigma} \\ 2) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} & ; \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e \\ 3) \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = (1 - \chi_m') \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \text{bzw.} & \\ \vec{B} = \frac{\mu_0}{1 - \chi_m'} \vec{H} = \underbrace{\mu_r \mu_0}_{\mu} \vec{H} = (1 + \chi_m) \mu_0 \vec{H} & ; \quad \chi_m = \frac{\chi_m'}{1 - \chi_m'} \quad , \quad \mu_r = 1 + \chi_m \end{array}$$

Mit linearem Materialgesetz folgt also:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \operatorname{div} \epsilon \vec{E} = \rho_0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 & \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} - \partial_t \epsilon \vec{E} = \vec{j}_0 \end{array}}$$

Vgl. Maxwell im Vakuum

$$\rho \leftrightarrow \rho_0$$

$$\epsilon_0 \leftrightarrow \epsilon$$

$$\vec{j} \leftrightarrow \vec{j}_0$$

$$\mu_0 \leftrightarrow \mu$$

Homogenes Material: ϵ, μ vor $\vec{D} \leadsto$ wie Vakuum

! Materialien mit inhomogenem ϵ oder μ (insbesondere periodisch)

$\rightarrow$ Photonische Kristalle (Gitter für Licht) ! (nichttriviale Dispersion)

Phasengeschwindigkeit:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \leadsto c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$$

c_0 Vakuum Lichtgeschwindigkeit

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad \text{Brechungsindex}$$

Energiedichte:

$$w = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

Energiestromdichte:

$$\vec{S}_p = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Impulsdichte

$$\vec{g} = \epsilon \vec{E} \times \vec{B} = \vec{D} \times \vec{B} = \frac{1}{c_0^2} \vec{S}_p$$

Achtung: Ausdrücke mit Hilfsfeldern $\vec{D}, \vec{H}$ nur richtig für lineare Materialgesetze!

Achtung II: Konvention ist, daß Energie mikroskopischer Ladungen zu w_{el} zählt.

$$\leadsto v = - \vec{j}_0 \cdot \vec{E} \quad (\text{daraus folgen } w \text{ und } \vec{S}_p)$$

Integration, Kondensator:

$$\begin{array}{c} + \text{---} \text{---} \text{---} - \\ + \text{---} \text{---} \text{---} - \\ \epsilon_0 E^2 \end{array}$$

vs

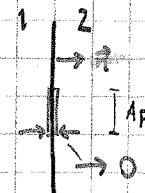
$$\begin{array}{c} + \text{---} \text{---} \text{---} - \\ + \text{---} \text{---} \text{---} - \\ + \text{---} \text{---} \text{---} - \\ 2 \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \end{array}$$

$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ enthält Energie zur Verdrängung der Pol. Ladungen!

↓ 21.12

↓ -6

9.4. Verhalten an Grenzflächen



① $\text{div } \vec{B} = 0 \leadsto \oint d\vec{A}_F \cdot \vec{B} = 0$

$\hat{n} \cdot A_F (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = A_F (B_{2n} - B_{1n}) = 0$

$\leadsto$ Normalkomponente B_n stetig beim Durchgang durch Grenzfläche

② $\text{div } \vec{D} = \rho_0 \leadsto \oint d\vec{A}_F \cdot \vec{D} = Q_0 \leadsto D_{2n} - D_{1n} = \frac{Q_0}{A_F} = \sigma_0$

$\leadsto$ Ladungsfreie Grenzflächen: D_n stetig

$\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \leadsto \epsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \rho/A_F = \sigma_0 + \sigma_p$

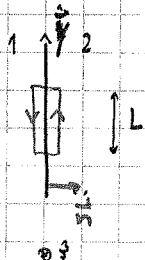
$\leadsto$ Ladungsfreie Grenzflächen: $E_{2n} - E_{1n} = \frac{\Delta E_n}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \leadsto \Delta E_n = -\Delta P_n / \epsilon_0, \sigma_p = -\Delta P_n$ (vgl. $\sigma_p = -\text{div } \vec{P}$ + Gauß)

③ $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \leadsto \oint d\vec{r} \cdot \vec{E} = \int_{-l}^l d\vec{A}_F \cdot \dot{\vec{B}}$

$\dot{E}_y L (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 = L (E_{2t} - E_{1t})$

$\leadsto$ Tangentialkomponente E_t stetig



④ $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_0 + \dot{\vec{D}} \leadsto \oint d\vec{r} \cdot \vec{H} = I_0 + \int_{-l}^l d\vec{A}_F \cdot \dot{\vec{D}}$

$L (H_{2t} - H_{1t}) = (I_0)_z$

$\leadsto$ Stromfreie Grenzflächen H_t stetig

$\text{rot } \vec{B} = \vec{j} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{j}_0 + \vec{j}_m + \dot{\vec{D}}$

$L/\mu_0 (B_{2t} - B_{1t}) = \frac{(I_0)_z}{L} + (I_m)_z \leadsto \Delta B_y = \mu_0 \frac{(I_m)_z}{L}$

$\vec{H} + \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 \leadsto \Delta B_y = \mu_0 \Delta H_y$

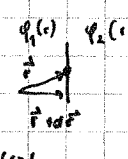
$\Delta H_y = \frac{(I_m)_z}{L}$

Magn. Oberflächenstrom

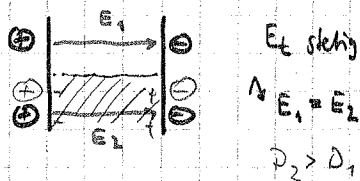


Beachte: E_t stetig folgt auch aus Stetigkeit des Potentials φ .

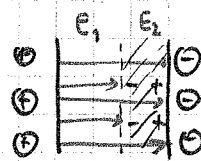
(φ muss stetig sein, damit E endlich) : $\varphi_1(\vec{r}) = \varphi_2(\vec{r})$
 $\varphi_1(\vec{r} + d\vec{r}) = \varphi_2(\vec{r} + d\vec{r}) \leadsto \frac{\partial \varphi_1}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vec{r}} \Big|_{\vec{r} \parallel \text{Grenzfläche}}$



Bsp Plattenkondensator mit Dielektrikum

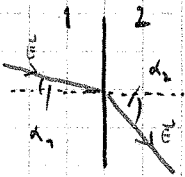


E_t stetig
 $\nearrow E_1 = E_2$
 $D_2 > D_1$



D_n stetig
 $\nearrow E_1 > E_2 \quad (\epsilon_{r2} > 1)$

Bsp Grenzfläche schräg zu Feldlinie



$$\left. \begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} & \leadsto & E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2 \\ D_{1n} &= D_{2n} & \leadsto & \epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{1}{E_1} \tan \alpha_1 &= \frac{1}{E_2} \tan \alpha_2 \\ \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \end{aligned}$$

9.5. Dielektrische Kugel im homogenen Feld



$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \leadsto \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi$

$\text{div } \vec{D} = 0 \quad (\text{keine freie Ladungen}) \quad \leadsto \quad -\text{div}(\epsilon \text{ grad } \varphi) = 0$



Grenzfläche bei $r=a$:

- φ stetig $\leftrightarrow E_t$ stetig, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_t$ stetig
- D_n stetig $\rightarrow \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ stetig
Skalar!

Ansatz (Symmetrie, siehe auch Kap 3.8.)

$$\varphi(\vec{r}) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \, g(r, a; \epsilon_i, \epsilon_a)$$

Einsetzen:

$\text{div } \vec{D} = 0 \quad (r \neq a) \quad \Rightarrow \quad -\epsilon_i \Delta \varphi$

$\Delta \varphi = 0 \quad \text{für } r \neq a \quad (r=a \leadsto \epsilon \text{ springt} \leadsto \Delta \varphi \neq 0)$

$\leadsto \quad \frac{4}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2} = 0$

Potenz-
ansatz

$$g(r) = \begin{cases} \alpha + \frac{\beta a^3}{r^3} & r < a \\ \gamma + \frac{\delta a^3}{r^3} & r > a \end{cases}$$

Randbed:

$g(r=0)$ regulär $\leadsto \beta = 0$

$g(r \rightarrow \infty) = 1 \quad \leadsto \quad \gamma = 1$

φ stetig $\leadsto \alpha = 1 + \delta$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + r g(r) \right) \leadsto \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} (r g(r)) \text{ stetig}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial r} (r a) &= \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial r} \left(r + r \delta \frac{a^3}{r^3} \right) \quad \text{bei } r=a \\ \varepsilon_i a &= \varepsilon_a \left(1 - 2 \delta \frac{a^3}{r^3} \right) = \varepsilon_a (1 - 2\delta) \\ \varepsilon_i (1 + \delta) &= \varepsilon_a (1 - 2\delta) \end{aligned}$$

$$\leadsto \delta = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a}, \quad \alpha = \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a}$$

$$\begin{aligned} \varphi(r \leq a) &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} (1 + \delta) \\ \varphi(r > a) &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left(1 + \delta \frac{a^3}{r^3} \right) \end{aligned}$$

Felder:

$$\vec{E}_i = (1 + \delta) \vec{E}_0 = \vec{E}_0 + \Delta \vec{E}_i$$

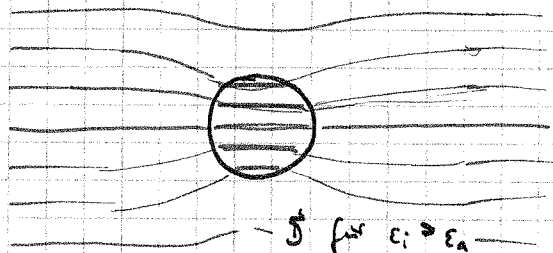
$$\Delta \vec{E}_i = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \vec{E}_0$$

$$\vec{D}_i = \varepsilon_i \vec{E}_i = 3 \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \vec{D}_0$$

und

$$\vec{E}_a = \vec{E}_0 + \text{Dipolfeld} \quad (!) \quad \left(\varphi_{\text{Dipol}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \right) \quad \text{hier } \vec{p} = \sqrt{\varepsilon_0 \delta a^3}$$

$\rightarrow 4\pi \varepsilon_0$
Dipol = Dichte fest!



Spezialfälle:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \varepsilon_a / \varepsilon_i \rightarrow 0 \quad (\text{z.B. } \varepsilon_i \rightarrow \infty) &\leadsto \vec{E}_i = 0 \\ \delta = -1, \quad \varphi(r > a) &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \varepsilon_a / \varepsilon_i \rightarrow 0 \quad (\text{z.B. } \varepsilon_i \rightarrow \infty) \\ \delta = -1, \quad \varphi(r > a) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \end{aligned}} \right\} \text{wie leitende Kugel}$$

Elektrostatische: Leitendes Medium $\varepsilon = \infty$ (ideales Dielektrikum)

Aus $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ folgt mit $\varepsilon \rightarrow \infty$ $\vec{E} = 0$. (Influenzladung = Polarisationsladung)

$$\textcircled{2} \quad \varepsilon_a = \varepsilon_0 \text{ (Vakuum)}, \quad \Delta \vec{E}_i = - \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_0} \vec{E}_0$$

$$\text{Polarisation} \quad \vec{P}_i = \vec{D}_i - \varepsilon_0 \vec{E}_i = \frac{3(\varepsilon_i - \varepsilon_0)}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_0} \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

$$= -3\varepsilon_0 \Delta \vec{E}_i$$

$$\Delta \vec{E}_i = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P}_i$$



$\frac{1}{3} \equiv$ Entelektrisierungsfaktor = Fkt der Geometrie ($\frac{1}{3}$ f. Kugel)

9.6. Atomare Polarisierbarkeit und Suszeptibilität

Polarisation $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i$ (Dipol dichte)

$\vec{p}_i(\vec{E}_{\text{lokal}}) = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_{\text{lokal}}$, α atomare Polarisierbarkeit

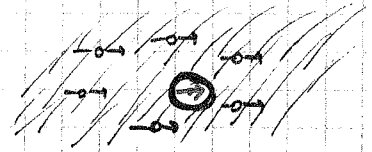
Lokales Feld:

$\vec{E}_{\text{lokal}} \neq \vec{E}_{\text{gemittelt}}$

= Feld aller anderen Dipole & Ladungen

= homogenes Feld $\vec{E}_{\text{gemittelt}}$ + fehlendes Dipol ∇ mit $\vec{p}_i = -\vec{p}$ $\rightarrow \Delta \vec{E}_i = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{p}_i$

$\vec{E}_{\text{lokal}} = \vec{E} + \Delta \vec{E}_i = \vec{E} - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{p}_i = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{p}$



Polarisation:

$n = \frac{N}{V}$
(Dichte)

$\vec{P} = n \vec{p} = \frac{n \alpha}{x} \epsilon_0 \left(\vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{p} \right)$

$\vec{P} = \frac{x}{1 - x/3} \epsilon_0 \vec{E}$ (Vgl. $\vec{P} = \chi_{el} \epsilon_0 \vec{E}$)

Suszeptibilität:

$\chi_{el} = \frac{x}{1 - x/3}$, $\epsilon_r = 1 + \chi_{el} = \frac{2x+3}{3-x}$

Diell. konstante

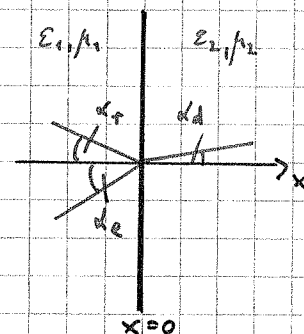
$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{x}{3}$

(Clausius - Mosotti)

gilt für homogene, isotrope Medien

9.7. Reflexion und Brechung von Wellen an Grenzflächen

Einfallend	$\vec{E}^e e^{i(\vec{k}^e \cdot \vec{r} - \omega_e t)}$	$\omega_e = \frac{c}{n_1} k_e$	$\left. \begin{array}{l} \omega_r = \frac{c}{n_1} k_r \\ \omega_d = \frac{c}{n_2} k_d \end{array} \right\} n^2 = \epsilon_r \mu_r$
Reflektiert	$\vec{E}^r e^{i(\vec{k}^r \cdot \vec{r} - \omega_r t)}$		
Durchgelassen	$\vec{E}^d e^{i(\vec{k}^d \cdot \vec{r} - \omega_d t)}$		



Randbed bei $x=0$: E_t stetig

$$\vec{E}_t^e e^{i(\vec{k}^e \cdot \vec{r} - \omega_e t)} + \vec{E}_t^r e^{i(\vec{k}^r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} = \vec{E}_t^d e^{i(\vec{k}^d \cdot \vec{r} - \omega_d t)}$$

für alle t : $\omega_e = \omega_r = \omega_d$

für alle y, z : $k_{ey} = k_{ry} = k_{dy}$; $k_{ez} = k_{rz} = k_{dz}$

} gilt für bel. Grenzflächenbed.,
damit auch für Schallwellen etc.

Geometrie $k_{ey} = k_e \sin \alpha_e = k_{ry} = k_r \sin \alpha_r = k_{dy} = k_d \sin \alpha_d$

Mit $\omega_e = \omega_r = \omega_d$ und Dispersionsrelation $\omega = \frac{c}{n} k$ folgt $k_e = k_r$; $k_e/n_1 = k_d/n_2$

$$\Rightarrow \boxed{\sin \alpha_e = \sin \alpha_r} ; \quad \boxed{\frac{\sin \alpha_e}{\sin \alpha_d} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}}$$

Im Vakuum $k_e = k_r = k_1$, $\alpha_e = \alpha_r = \alpha_1$
 $k_d = k_2$, $\alpha_d = \alpha_2$

Snelliussches
Brechungsgesetz

Amplituden: Fresnelsche Formeln

Hier werden explizit die Grenzflächenbed E_t stetig & H_t stetig verwendet.

$$\begin{aligned} \underline{E_t}: \quad \vec{E}_t^e + \vec{E}_t^r &= \vec{E}_t^d \\ \underline{H_t}: \quad \frac{\vec{B}_t^e}{\mu_1} + \frac{\vec{B}_t^r}{\mu_1} &= \frac{\vec{B}_t^d}{\mu_2} \end{aligned} \quad \text{Aus } \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{folgt } \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{(\vec{k}^e \times \vec{E}^e)_t}{\mu_1} + \frac{(\vec{k}^r \times \vec{E}^r)_t}{\mu_1} = \frac{(\vec{k}^d \times \vec{E}^d)_t}{\mu_2}$$

Die offenen Koeff. werden damit und über Transversalität bestimmt.

a) Senkrechter Einfall

$$\left. \begin{aligned} \vec{k}^e &= k_1 \vec{e}_x \\ \vec{k}^r &= -k_1 \vec{e}_x \\ \vec{k}^d &= k_2 \vec{e}_x \end{aligned} \right\} \leadsto \frac{k_1}{\mu_1} \left[\vec{e}_x \times \vec{E}^e - \vec{e}_x \times \vec{E}^r \right] = \frac{k_2}{\mu_2} (\vec{e}_x \times \vec{E}^d)_t$$

automatisch tangential

$$\text{d.h.} \quad \frac{k_1}{\mu_1} (\vec{E}^e - \vec{E}^r) = \frac{k_2}{\mu_2} (\vec{E}^d)$$

Beträge: $\vec{E}^r = a^r \vec{E}^e, \quad \vec{E}^d = a^d \vec{E}^e$

$$\begin{aligned} 1 + a^r &= a^d \\ 1 - a^r &= \frac{\mu_2 k_2}{\mu_1 k_1} a^d =: v a^d \quad \left(v = \frac{k_2 \mu_1}{k_1 \mu_2} = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{a^d = \frac{2}{1+v}, \quad a^r = \frac{1-v}{1+v}}$$

Fresnelsche Formeln
für senkrechten Einfall

Phasensprung bei Reflexion am dichteren Medium
($v > 1 \leadsto a^r < 0$)

Homogenes Medium: (keine Grenzfläche)

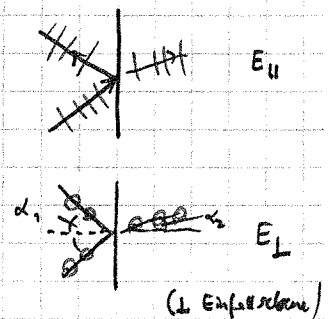
$$v = 1, \quad a^d = 1, \quad a^r = 0$$

b) Schräger Einfall (ohne Beweis)

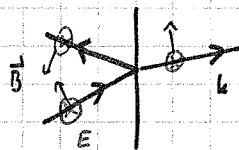
$$\xi = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{\perp}^d &= \frac{2}{1+\xi v}, & a_{\perp}^r &= \frac{1-\xi v}{1+\xi v} \\ a_{\parallel}^d &= \frac{2}{\xi+v}, & a_{\parallel}^r &= -\frac{\xi-v}{\xi+v} \end{aligned}}$$

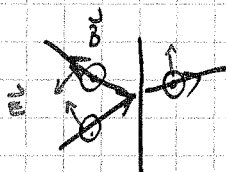
konsistent mit Jackson



$E_{\perp}$:



$E_{\parallel}$:



Damit entspricht $a_{\perp}^r > 0$ einem Phasensprung.

Energiebilanz (nur für normalen Einfall)

Erwartung $S^e = S^d + S^r$

Es gilt: $|S_p^d| = \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{n} = \frac{h \vec{E}^2}{\omega \mu} = \frac{n}{c_0} \frac{\vec{E}^2}{\mu}$

$\leadsto c_0 S_p^e = \frac{n_1}{\mu_1} (E^e)^2$

$c_0 S_p^r = \frac{n_2}{\mu_2} (a^r E^e)^2 = a^{r^2} c_0 S_p^e$

$c_0 S_p^d = \frac{n_2}{\mu_2} (a^d E^e)^2 = \frac{n_1}{\mu_1} v (a^d E^e)^2 = \underbrace{v \cdot a^{d^2}}_{= \frac{4v}{(1+v)^2} = 1 - \frac{(1-v)^2}{(1+v)^2}} c_0 S_p^e$
 $= 1 - a^{r^2}$

$\leadsto c_0 S_p^d = (1 - a^{r^2}) c_0 S_p^e$

$\leadsto \underline{S_p^d = S_p^e - S_p^r = T S_p^e}$

Reflexionskoeffizient: $R = a^{r^2}$

Transmissionskoeffizient: $T = 1 - R$

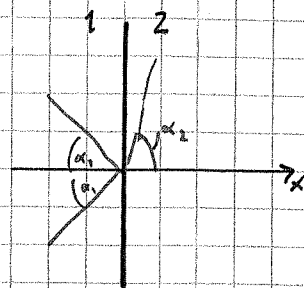
9.8. Total reflexion

$$n_2 < n_1 : \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} < 1$$

Grenzwinkel α_G :

$$\sin \alpha_G = \frac{n_2}{n_1}$$

Für $\alpha_1 > \alpha_G$ ist $\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_G} > 1$



→ $\nexists$ keine gebrochene Welle $\hat{=}$ „Total reflexion“

Korrekte physikalische Interpretation:

$$\sin \alpha_2 = \frac{k_{2y}}{k_2} > 1$$

Mit $k_2^2 = k_{2x}^2 + k_{2y}^2$ ist dann k_{2x} reell imaginär!

$$k_{2x} = i\kappa$$

E-Feld im Medium 2:

$$\vec{E} = \vec{E}^d e^{i(k_{2y}y - \omega t)} e^{-\kappa x}$$

Welle parallel zur Oberfläche, klopft in x-Richtung ab!

(keine Dissipation, Energie wird reflektiert!)

$$\kappa = \sqrt{k_{2y}^2 - k_2^2} = k_2 \sqrt{\sin^2 \alpha_2 - 1} = k_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_G}$$

$\uparrow$
 $\frac{k_1}{n_1} = \frac{k_2}{n_2}$

Fresnelsche Formeln:

$$a_{\perp}^r = \frac{1 - v \cdot \xi}{1 + v \cdot \xi}$$

$$a_{\parallel}^r = -\frac{\xi - v}{\xi + v}$$

$$\xi = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}}{\cos \alpha_1} = i \xi'_{\text{reell}}$$

$$a_{\perp}^r = \frac{1 - i v \xi'}{1 + i v \xi'}$$

$$|a_{\perp}^r| = 1$$

$$a_{\parallel}^r = -\frac{i \xi' - v}{i \xi' + v}$$

$$|a_{\parallel}^r| = 1$$

alles wird reflektiert,
mit Phasenverschiebung

Achtung!

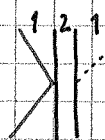
$$a_{\perp}^d = \frac{2}{1 + i v \xi'} \neq 0$$

$$a_{\parallel}^d = \frac{2}{i \xi' + v} \neq 0$$

(das heißt in x-Richtung
propagierende Welle)

Achtung II:

Falls n_2 -Medium dünn (!),
dann Transmission möglich!



(hier keine vollst. Refl.)

9.9. Kompliziertere Materialgesetze

a) Räumliche Anisotropie

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j$$

$$\vec{B} = \hat{\mu} \vec{H}$$

$\hat{\epsilon}, \hat{\mu}$ Symmetrische Tensoren; im Hauptachsensystem $\epsilon_{ik} = \epsilon_i \delta_{ik}$

b) Frequenz- und Impulsabhängigkeit von ϵ und μ

$$\vec{D}(k, \omega) = \hat{\epsilon}(k, \omega) \vec{E}(k, \omega) \quad (\vec{B} \text{ analog}), \text{ d.h.}$$

$$D_i(x, t) = \sum_j \int dt' \int d^3x' \epsilon_{ij}(x-x', t-t') E_j(x', t')$$

Optische Wellen $\leadsto k$ -Abhängigkeit kann ^{meist} vernachlässigt werden $\leadsto \epsilon(\omega), \mu(\omega)$
 $n(\omega), c(\omega)$
 Dispersion

c) Nichtlineare Response

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij}^{(1)} E_j + \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \dots$$

$$\text{Wichtig für Dynamik!} \quad D(\omega) = \epsilon^{(1)} E(\omega) + \epsilon^{(2)} E(\omega_1) E(\omega_2) \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2) + \dots$$

($\leadsto$ Laser, Nichtlineare Optik)

d) Piezoelektrizität

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{u}) = \hat{\epsilon} \vec{E} + \underbrace{\hat{\pi} \vec{u}}_{\text{Piezoelektrizität}}$$

$\uparrow$ Deformationstensor

e) Magnetwiderstand, H.-H.-Effekt

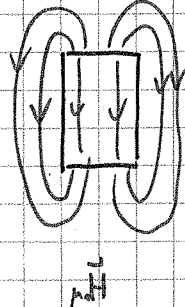
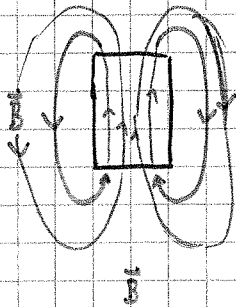
$$\vec{j}(\vec{E}, \vec{B}) = \hat{\sigma}(\vec{B}) \vec{E} = \hat{\sigma}_0 \vec{E} + \underbrace{\alpha \vec{B} \times \vec{E}}_{\text{Hallstrom}} + \underbrace{\Delta \hat{\sigma}(\vec{B}) \vec{E}}_{\text{Magnetwiderstand}}$$

f) Permanent magnet

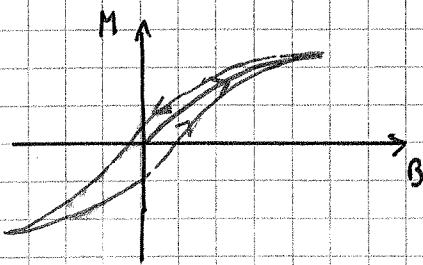
$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 + \text{Korrekturen}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \leadsto \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad ; \quad \text{div } \vec{H} = \underbrace{-\text{div } \vec{M}}_{\text{Smag}} \quad ; \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_0 + \underbrace{\vec{j}}_{\substack{\uparrow \\ \text{nur Permanentmagnet}}} = 0$$

$\leadsto$ Magnetostatik (analog El. statik)



g) Ferromagnetismus



Hysteresis: $\vec{M}$ - $\vec{B}$ -Kurve nicht eindeutig,
hängt von Vorgeschichte ab (Gedächtnis)

Analog: Ferroelektrika ($\vec{P} \neq 0$)

h) Supraleiter

$$\vec{B} = 0 \quad (\text{Meissner-Ochsenfeld-Effekt}) \quad \leadsto \quad \mu = 0 \quad (\text{idealer Diamagnet})$$

$$\sigma = 0 \quad (\text{idealer Leiter}) \quad \leadsto \quad \text{Dauerstrom in SL Ring}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dichte der SL Ladungsträger: } n_s^* \\ \text{Ladung: } -|e| \\ \text{Supraström: } \vec{j}_s = n_s^* e^* \vec{v} \end{array} \right\} \leadsto \text{Ladungsdichte } p_s^* = n_s^* e^*$$

Ladungsträger werden durch Feld beschleunigt: $|\dot{\vec{v}}| \sim |\dot{\vec{E}}|$

$$\sim \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s^* e^*{}^2}{m^*} \vec{E}$$

↑ eff. Masse

1. London-Gleichung

Aus $\text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$ kann man ableiten:

$$\text{rot } \vec{j}_s = - \frac{n_s^* e^*{}^2}{m^*} \vec{B} = 0$$

2. London-Gleichung

Mit $\text{rot } \vec{B}_{\mu_0} = \vec{j}_s + \cancel{\epsilon_0 \dot{\vec{E}}}$ folgt dann: ($\approx$ Übung)

$$\Delta \vec{B} = \frac{n_s^* e^*{}^2 \mu_0}{m^*} \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

$$\sim B(x) = B_0 e^{-x/\lambda}, \quad \lambda \text{ Eindringtiefe}$$

2. London-Gl. wird erfüllt durch $\vec{j}_s = \frac{n_s^* e^*{}^2}{m^*} \vec{A}$ mit $\text{div } \vec{A} = 0$.

10. Quasistationäre Ströme

10.1. Quasistationäre Näherung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0 & \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} &= \vec{j} \end{aligned}$$

Idee: Zeitabhängigkeit langsam

Quasistationäre Näherung: $\epsilon_0 \dot{\vec{E}} \ll \vec{j}$ bzw. $\epsilon_0 \int d\vec{A}_F \cdot \dot{\vec{E}} \ll I$

Damit: ^{effektive} Entkopplung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ (in feld erzeugender Quelle!)

Mit quasistationärer Näherung:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \leadsto \quad \underline{-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}} \quad \left(\text{mit } \operatorname{div} \vec{A} = 0, \text{ Coulomb-Eichung} \right)$$

$$\text{Also: } \vec{j}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\text{Zeit nur Parameter}} \vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$\text{Exakt wäre: } \square \vec{A} = \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{Vernachlässigung von } \dot{\vec{E}} \text{ entspricht also } \square \approx -\Delta \quad (\text{Retardierung vernachlässigt})$$

Bedingung für quasistat. Näherung:

$$\partial_t \sim -i\omega \sim -i \frac{2\pi}{T}$$

$$\partial_{\vec{r}} \sim \partial(1/\lambda) \quad \ell \dots \text{charakt. Länge für Änderung des Feldes}$$

$$\leadsto \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \ll \Delta \quad \text{ist} \quad \frac{\omega^2}{c^2} \ll \frac{1}{\ell^2}, \quad \frac{v}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\leadsto \underline{\left(\frac{2\pi \ell}{\lambda} \right)^2 \ll 1} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\left(\frac{2\pi \ell}{c\tau} \right)^2 \ll 1}$$

Bsp

$$\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \quad \leadsto \quad \lambda = 6 \cdot 10^6 \text{ m} \quad \gg \quad \text{Geräteausdehnung}$$

Schließlich: Berechnung von $\vec{E}$:

$$\square \varphi = \rho/\epsilon_0 \quad \leadsto \quad -\Delta \varphi = \rho/\epsilon_0$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \dot{\vec{A}}$$

Achtung: $\dot{\vec{A}}$ kann hier nicht vernachlässigt werden
(rot $\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \hat{=} \text{Induktion!}$)

10.2. Leiterschleifen

Mehrere Schleifen mit Strömen I_k

Induktionsgesetz:

$$(U_{\text{ind}})_i = -\dot{\Phi}_i \quad (\text{exakt})$$

$$\Phi_i(t) = \int_{S_i} d\vec{A}_P \cdot \vec{B}(t) = \sum_{ik} L_{ik} I_k(t)$$

Quasistat. Näherung: ohne Retardierung

Leiterschleife i:

R_i, C_i , Spannungsquelle U_i (zeitunabhängig)

$$U_{\text{ind}} = \oint d\vec{r} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \oint d\vec{r} \vec{E}' \quad (\text{mittleres BZ})$$

Kirchhoff:

$$-U_i + R_i I_i + Q_i/C_i = U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \sum_k L_{ik} I_k$$

$$\boxed{\ddot{U}_i = R_i \dot{I}_i + I_i/C_i + \sum_k L_{ik} \ddot{I}_k}$$

Nur induktive Kopplung
keine kapazitive Kopplung

Speziell 1 Schleife

$$\ddot{U} = L \ddot{I} + R \dot{I} + I/C$$

① Eigenschwingung $U=0$

$$I = I_0 e^{i\omega t} \quad \leadsto \quad -\omega^2 L + i\omega R + 1/C = 0$$

$$R=0 \quad \leadsto \quad \omega_0 = \sqrt{1/LC}, \quad \text{sonst Dämpfung}$$

(b) Erzwungene Schwingung

$$U = U_0 e^{i\omega t} \leadsto I = I_0 e^{i\omega t}$$

$$+ i\omega U_0 = (-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}) I_0$$

$$U_0 = \left[R + \left(i\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_0$$

$$\underline{Z} \quad (\text{Scheinwiderstand}), \quad \underline{Z} = |Z| e^{i\varphi}$$

$$\leadsto U_0 = \underline{Z} I_0, \quad \begin{matrix} I = \operatorname{Re} I_0 e^{i\omega t} \\ U = \operatorname{Re} U_0 e^{i\omega t} \end{matrix} \leadsto U = \underline{Z} I = \underline{Z} I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Energiebilanz:

$$U = L \dot{I} + RI + Q/C$$

$$\leadsto UI = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} Q^2 / C \right) + R I^2$$

Leistung

W_{mag}

W_{el}

Joulesche Wärme (Dissipation)

Mittelung über eine Periode: $\overline{N} = \overline{N}_{\text{Joule}}$

$$\overline{I^2} = I_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} I_0^2 \quad \leadsto I_{\text{eff}} := \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$$

$$U_{\text{eff}} := \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$$

$$\overline{N} = U_0 I_0 \overline{\cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)}$$

$$= \frac{1}{2} U_0 I_0 (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi) = \underline{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi}$$

$$\text{Gleiches Ergebnis über } \overline{N} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U^* I) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U I^*) = \overline{(\operatorname{Re} U)(\operatorname{Re} I)}$$

$$\cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi)$$

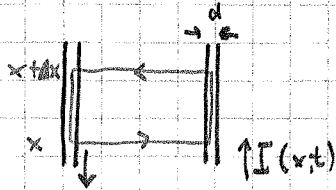
$$\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi = \cos 2\omega t \cos \varphi + \cos \varphi - \sin 2\omega t \sin \varphi$$

$$= (2 \cos^2 \omega t - 1) \cos \varphi + \cos \varphi - 2 \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi$$

$$= 2 \cos \omega t (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) //$$

10.3. Drahtwellen

Doppelleiter



Größen pro Länge:

Induktivität

$$L = \frac{\Delta L}{\Delta x}$$

Kapazität

$$C = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

Widerstand
(links + rechts)

$$r = \frac{\Delta R}{\Delta x}$$

Ladung

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta x}$$

Induktion:

$$\oint \vec{d\vec{r}} \cdot \vec{E} = - \frac{d}{dt} (\Delta \phi)$$

Quasistat:

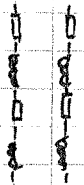
$$\Delta \phi(x, t) = \frac{L \cdot \Delta x}{L \text{ Indukt.}} \cdot I(x, t)$$

(auch $d \ll \lambda$)Spannungsbilanz:
(Masche)

$$\underbrace{U(x + \Delta x) - U(x)}_{\frac{\partial U}{\partial x} \Delta x} + \Delta x \cdot r \cdot I = - L \cdot \dot{I}$$



$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} + r I + L \dot{I} = 0}$$

Ladungsbilanz:
(ein Leiter)

$$\frac{d}{dt} (\Delta Q) + \oint \vec{d\vec{A}} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\Delta x \cdot q + I(x + \Delta x) - I(x) + \Delta x \cdot g U(x) = 0$$

Verluste, g ist Leitwert pro Länge
in Isolation

$$Q = C \cdot U \leadsto$$

$$\boxed{g \dot{U} + \frac{\partial I}{\partial x} + g U = 0}$$

Also

$$g \frac{\partial U}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + g \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

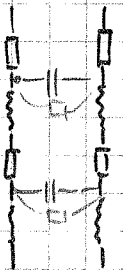
Oder

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial t} + r I + L \dot{I} = 0$$



$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - g L \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - (g r + g L) \frac{\partial I}{\partial t} - g r I = 0}$$

Verluste

Telegraphen-
Gleichung

Ideale Leitung: $r=0, g=0$

$$\leadsto \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = g l \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \quad \leadsto \underline{I(x,t) = I(x \mp v_0 t)}$$

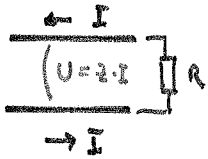
Ausbreitungsgeschwindigkeit $v_0^2 = 1/gl$

Weiter: $\frac{\partial U}{\partial x} = -l \frac{\partial I}{\partial t} = \pm v_0 l \frac{\partial I}{\partial x}$

$$\leadsto \underline{U = \pm l v_0 I = \pm \sqrt{l/g} I} ; \quad Z = \sqrt{l/g} \text{ "Wellenwiderstand"}$$

z.B.

Anpassung:



$$U = R \cdot I$$

Bei $R \neq Z$ teilweise Reflexion der Welle.

Anpassung $R = Z$ bzw. $Z_1 = Z_2$ für 2 Wellenleiter.

Nichtideale Leitung:

Ansatz: $I(x,t) = I_0 e^{-i(kx - \omega t)}$

Einsetzen liefert (o.B.):

$$k = k_0 - ik_1 \quad \leadsto I = I_0 e^{-k_1 x} e^{-i(k_0 x - \omega t)}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{v_0} \left(1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{l} - \frac{g}{s} \right)^2 \right) \quad \leadsto \underline{v = \frac{\omega}{k_0} \neq v_0} \quad \leadsto v(k)$$

Dispersion

"Auswahl" der Dispersion:
(durch Anpassen von l)

$$\frac{r}{l} = \frac{g}{s} \quad \leadsto \quad k_1 = \frac{\omega}{v_0} \quad \text{ideal}$$

Dämpfung $k_1 = \frac{1}{2v_0} \left(\frac{r}{l} + \frac{g}{s} \right)$

Signalverzerrung

10.4. Quasistationäre Ströme in Leitern (endliche Dicke!)

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}_L + \cancel{\epsilon \dot{\vec{E}}} \quad \text{quasistationäre Näherung}$$

$$\epsilon \operatorname{div} \vec{E} = \rho_0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\vec{j}_L = \sigma \vec{E} \quad (\vec{j}_L \rightarrow \vec{j})$$

Damit:

$$\operatorname{rot} \vec{j} = \sigma \operatorname{rot} \vec{E} = -\sigma \dot{\vec{B}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = -\sigma \dot{\vec{B}} = \frac{1}{\mu} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} \right)$$

$$\begin{array}{l} \Delta \vec{B} - \mu \sigma \dot{\vec{B}} = 0 \\ \Delta \vec{E} - \mu \sigma \dot{\vec{E}} = 0 \\ \Delta \vec{j} - \mu \sigma \dot{\vec{j}} = 0 \end{array}$$

Typ Diffusionsgleichung, irreversibel
($\partial^2/\partial t^2$, aber $\partial/\partial t$)

Ansatz:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Einsetzen:

$$-\vec{k}^2 - i\mu\sigma\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{-i\mu\sigma\omega} = k_0(1-i)$$

($\vec{k} \parallel \vec{e}_x$)

$$k_0 = 1/\delta = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}$$

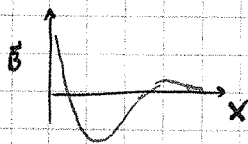
$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i(kx - \omega t)} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - kx)} e^{-kx}$$

$$\frac{e^{-kx}}{e^{-x/\delta}}$$

Eindringtiefe
 $\delta \sim 1/\sqrt{\omega}$

Im Inneren des Leiters fallen Strom & Felder exponentiell ab!!

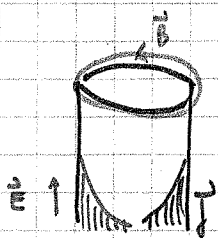
Leiter in z-Richtung:



Für nichtebene Oberflächen
gilt Beziehung für $r \gg \delta$.

Bsp Skin-Effekt:

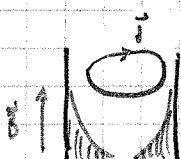
Wechselstrom fließt an Drahtoberfläche!



Eindringtiefe für Cu:

$$\begin{aligned} (\mu &\approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2, \\ \gamma_{\text{Cu}} &\approx 1.55 \cdot 10^8 \text{ S/m}) \end{aligned}$$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$	δ
1 Hz	6 cm
100 Hz	6 mm
10 kHz	0.6 mm

Bsp Magnetfeld im EisenkernAbschirmströme
(Wirbelströme)

Fe:

$$(\mu \approx 100\mu_0, \gamma_{\text{Fe}} \approx 8.6 \cdot 10^9 \text{ S/m})$$

ν	δ
1 Hz	1.5 cm
100 Hz	1.5 mm
1 kHz	0.15 mm

Gegenmaßnahme: $\sigma \rightarrow \infty$ (isolierte Lamellen
→ Trafo)Widerstand eines Drahtes bei Skin-Effekt

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{E \cdot l}{I}$$

 $E \equiv$ von außen angelegtes Feld $\delta \ll r \rightarrow$ statisches Skineffekt

$$\begin{aligned} I &= \int d\vec{A}_F \cdot \vec{j} = \sigma \int_0^{\infty} dx E(x) \cdot 2\pi r, \quad E(x) = E e^{-(1-i)k_0 x} \\ &= \sigma E 2\pi r \int_0^{\infty} dx e^{-(1-i)k_0 x} = \sigma E 2\pi r \frac{1}{(1-i)k_0} \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$\sim \frac{Z}{l} = \frac{(1-i)k_0}{2\pi r \sigma} = \frac{1-i}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\sigma}} \quad (\text{für } \delta \ll r)$$

Vgl. Gleichstromwiderstand:

$$\frac{R}{l} = \frac{1}{\pi r^2 \sigma}$$



$$\frac{Z}{R} = \frac{1-i}{2} \frac{\pi}{\delta} \gg 1 \quad (!)$$

11. Dispersion

11.1. Allgemeines über Wellen in leitenden Medien

Ausgangspunkt: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{j}_0 = \sigma \vec{E}$, $\mu = \mu_0$

Maxwell: $\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad | \partial_t$

$$\leadsto \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (*)$$

und $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\epsilon \text{div } \vec{E} = \rho_e = 0$

$$\leadsto -\frac{1}{\mu_0} \text{rot rot } \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \text{grad div } \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{E} \quad (*) \quad \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ansatz: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ $\leadsto \frac{1}{\mu_0} (\vec{k})^2 = -i\omega\sigma + (\omega)^2 \epsilon$

$$\leadsto \vec{k}^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \left(\frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega} + \epsilon_r \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \underbrace{\left(\epsilon_r + \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right)}_{\tilde{\epsilon}_r}$$

Aufspaltung von $\vec{j}$ in $\vec{j}_0$ und $\vec{j}_p$ ist für $\omega > 0$ willkürlich (insbesondere bei hohen Frequenzen) $\leadsto$ Beiträge wieder zusammenfassen zu $\tilde{\epsilon}_r$ (oder zu $\frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega}$).

$\tilde{\epsilon}_r(\omega)$ ist dabei komplex. Auftrennung in ϵ_r und $\frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega}$ nur eindeutig für $\omega \rightarrow 0$, sonst können $\epsilon_r(\omega)$ und $\sigma(\omega)$ jeweils auch komplex sein.

Def: $\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{n}^2$, $\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r(\omega)} = n(1 + i\kappa)$ ($\mu = \mu_0$)
 $\swarrow \searrow$
 n, κ reell

Grenzfälle: $\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \gg \epsilon_r$ bzw. $\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_r}$ $\leadsto \epsilon_r$ vernachlässigen $\hat{=}$ quasistatischer Fall
 $\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \ll \epsilon_r$ bzw. $\omega \gg \frac{\sigma}{\epsilon_r}$ $\leadsto \sigma$ vernachlässigen $\hat{=}$ Dielektrikum

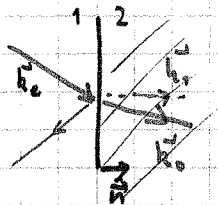
Interpretation von $\tilde{n}$:

ω reell, $\vec{k} = \vec{k}_0 + i\vec{k}_1$, $|\vec{k}_0| = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenlänge

$\vec{E} = \vec{E}_0 \underbrace{e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)}}_{\text{Wellenausbreitung}} \underbrace{e^{-\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}}_{\text{Abklingen}}$ $|\vec{k}_1| = 1/\delta$ Abklinglänge

Achtung: $\vec{k}_0$ und $\vec{k}_1$ nicht notwendig parallel, sondern ergeben sich aus Randbedingungen! (Stetigkeit ...)

z.B.:



Gleichheit an Grenzfläche $\rightarrow \vec{k}_{||}$ stetig

Da $\vec{k}_0$ reell $\rightarrow \vec{k}_1$ normal $\parallel \vec{n}$ (Vakuum)

$\sim E \sim e^{-x/\delta}$

Also: Richtungen aus Randbed; Beträge aus Dispersionsrelation

Speziell: $\vec{k}_0 \parallel \vec{k}_1 \parallel \vec{e}_x$, $\vec{k} = k \vec{e}_x$ (komplex) $(\tilde{n} = n(1+i\kappa))$

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{n}^2$, $k = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{n\omega}{c} (1+i\kappa)$

$|\vec{k}_0| = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, $|\vec{k}_1| = \frac{n\kappa\omega}{c} = 1/\delta$

Bem.: Formal auch komplexes ω möglich $\rightarrow$ zeitliches Abklingen

Grenzfall $\omega \rightarrow 0$
(für Leiter)

$\sigma/\omega \rightarrow \infty$, $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r} = \sqrt{\epsilon_r + \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega}} \rightarrow \infty$
 $n \rightarrow \infty$, $\kappa \rightarrow \infty$

Reflexionsverhalten:
(Fresnel, $n_1=1$)

$a^r = \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{n_2}{n_1}}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{n_2}{n_1}} = \frac{1 - \tilde{n}}{1 + \tilde{n}} \rightarrow -1$

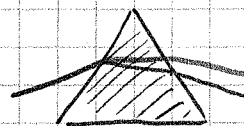
Vollständige Reflexion, analog Totalreflexion

$\rightarrow$ Leiter undurchsichtig — Achtung: hier Limites $\omega \rightarrow 0$,
nicht für sichtbares Licht
(komplizierter!)

11.2. Dispersion in Dielektrika

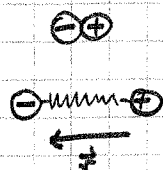
Dispersion: $n(\omega)$, $c_{\text{Phase}} = \frac{c}{n(\omega)} = c_{\text{ph}}(\omega)$ Phasengeschwindigkeit

Allg. $n(\omega)$ wächst mit ω
 "normale Dispersion"



Elementare Theorie der Dispersion $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$

Atomare Dipole

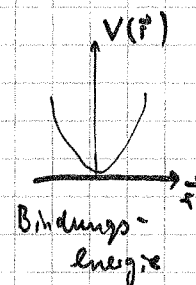


Ohne Feld $\vec{p} = 0$

Mit Feld $\vec{p} = -e\vec{r}$

Beweg.gl: (m = reduzierte Masse) $m\ddot{\vec{r}} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -e\vec{E}_{\text{lok}}$

Kleine Auslenkung $V(\vec{r}) = V(0) + \frac{m\omega_0^2}{2} \vec{r}^2 + \dots$
 harmonische Näherung



$\leadsto m(\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r}) = -e\vec{E}_{\text{lok}}$

Nun: $\vec{E}_{\text{lok}} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, erzwungene Schwingung $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$

Einsetzen: $m(-\omega^2 + \omega_0^2) \vec{r}_0 = -e\vec{E}_0$

$\leadsto \vec{r}_0 = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}_0$, $\vec{r} = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}_{\text{lok}}$

$\vec{p} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_{\text{lok}} = \alpha(\omega) \epsilon_0 \vec{E}_{\text{lok}}$

atomare Polarisierbarkeit

Früher:
 (Kap 9.6)

Clausius - Mossotti

$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{3} N \alpha$

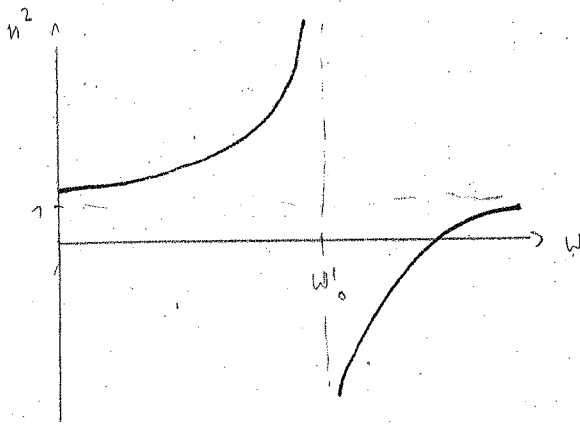
N = Dichte der atomaren Dipole

$\leadsto \boxed{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \frac{N e^2 / \epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2}}$

$\alpha = \frac{e^2 / \epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2}$

(Lorentz - Lorentz)

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2 / \epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{mit } \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{Ne^2 / \epsilon_0 m}{3\omega_0^2} \right) \quad \text{OK}$$



Einfluss der Inhomogenität des Feldes

23.6.1991

$\omega < \omega_0$: $n^2 > 1$ $\vec{p}$ und $\vec{E}$ gleichgerichtet

$\omega = \omega_0$: Resonanz

$\omega > \omega_0$: $\vec{p}$ und $\vec{E}$ antiparallel

$\omega \rightarrow \infty$: $n^2 \rightarrow 1$ $\vec{p} \rightarrow 0$ (atomare Dipole können nicht folgen)

1. d. $n(\omega)$ wächst mit ω

"normale Dispersion"

↳ blau stärker gebrochen als rot

Im kleinen Bereich oberhalb ω_0 : $n^2 < 0$, $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 < 0$

↳ $k = ik'$ (k' reell) $e^{ikx} \rightarrow e^{-k'x}$ exp. Abfall

→ analog Totalreflexion

Berücksichtigung der Dämpfung (Diss.)

$$m(\ddot{\vec{r}} + \omega_0 \dot{\vec{r}} + \gamma \ddot{\vec{r}}) = -e \vec{E}_{\text{loc}}$$

$$m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) \vec{r} = -e \vec{E}_{\text{loc}} \quad \text{d.h. } \omega^2 \rightarrow \omega^2 + i\gamma\omega$$

$$\tilde{n}^2 = 1 + \frac{Ne^2 / \epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

ω_0 unverändert

$$\tilde{n} = n(1 + i\kappa)$$

Mehrere Oszillatoren:

$$\omega_0 \rightarrow \omega_k, \quad \gamma \rightarrow \gamma_k, \quad \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \rightarrow \sum f_k$$

f_k Oszillatorstärke, $\sum f_k = 1$

$$\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$$

$$\tilde{n}^2 = 1 + \sum_k \frac{f_k}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega}$$

QT liefert gleiches Resultat!

11. 10.3. Anomale Dispersion

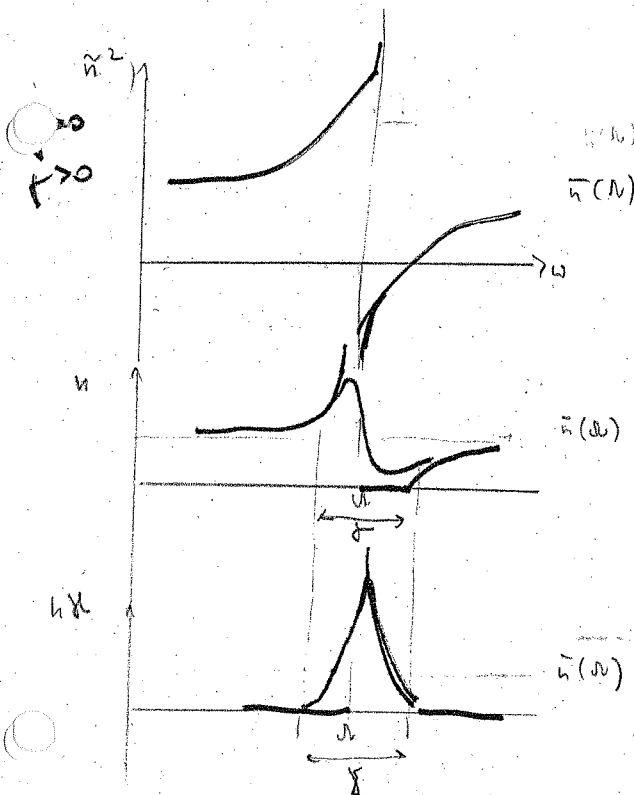
Umgebung einer Resonanzstelle,

$\gamma_k \ll \omega_k$ Dämpfung vernachlässigbar außerhalb der Resonanz

k-te Resonanzstelle $\omega_k \rightarrow \Omega$, $\gamma_k \rightarrow \gamma$, $A_k \rightarrow A$

Andere Beiträge: $\bar{n}(\omega)$ langsam veränderlich, näherungsweise reell ↓ 10.2.

$$\bar{n}^2 = \bar{n}^2(\omega) + \frac{A}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$



γ wesentlich, wenn

$$\gamma\omega \gg |\Omega^2 - \omega^2|$$

$$\gamma\Omega \gg |\Omega - \omega| 2\Omega$$

$$|\Omega - \omega| \leq \frac{\gamma}{2}$$

$n(\omega)$ abfallend an der

Resonanzstelle $\rightarrow$

"Anomale Dispersion"

gleichzeitig starke Dämpfung

Mathematische Behandlung für $\frac{A}{\gamma\Omega^2} \ll \bar{n}^2$

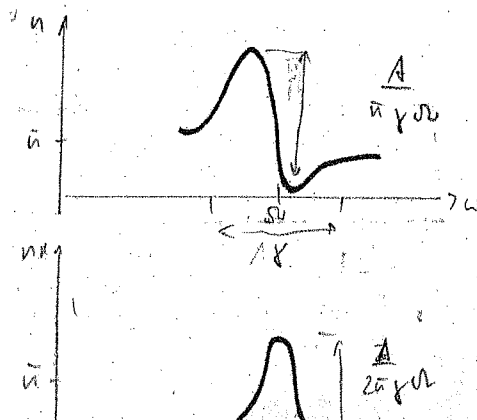
$$\bar{n} = \left(\bar{n}^2 + \frac{A}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right)^{1/2} = \bar{n} \left(1 + \frac{A/\bar{n}^2}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right)^{1/2}$$

$$= \bar{n} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{A/\bar{n}^2}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right)$$

$$\bar{n} = \bar{n} + \frac{(A/\bar{n}^2)(\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}{2(\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$\hookrightarrow n = \bar{n} + \frac{A}{2\bar{n}^2} \frac{\Omega^2 - \omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$n'' = \frac{A}{2\bar{n}^2} \frac{\gamma\omega}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$



11. 10.4. Metalldispersion

Bisher: Dielektrika $\tilde{n}^2 = 1 + \alpha \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$

Winn: Leiter: $\left\{ \begin{array}{l} \text{gebundene Elektronen } \omega_k \neq 0 \\ \text{freie Elektronen } \omega_k = 0 \end{array} \right.$

$\hookrightarrow \epsilon_r = \tilde{n}^2 = 1 + \alpha \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \frac{(Ne^2/\epsilon_0 m)_L}{\omega^2 + i\gamma\omega}$ $\gamma_L = \gamma$

gebundene Elektronen Leitungselektronen

$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_r + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad ; \quad \tilde{\sigma}(\omega) = \frac{i(Ne^2/m)_L}{\omega + i\gamma}$

$\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \sigma_0 = \frac{(Ne^2/m)_L}{\gamma}$ "Gleichstrom Leitfähigkeit" Drude 1900

{ Einschluss: Drude-Theorie }

$\vec{f} = \rho \vec{v} \quad , \quad \rho = -e N_L \quad , \quad \vec{F} = -\vec{F}_{\text{Reib}}$

$\rightarrow \vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{m\gamma}$

$\rightarrow \vec{f} = -e^1 \frac{N_L}{m\gamma} \vec{E} = \sigma_0 \vec{E} \quad , \quad \sigma_0 = \frac{Ne^2/m}{\gamma} \quad \text{von}$

γ — Stoppfrequenz, $\tau = \frac{1}{\gamma}$ — "Dauer des freien Fluges"

{ End of Einschluss }

$\epsilon_r = n_o^2 = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad ; \quad \omega_{pl}^2 = \left(\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \right)_L = \frac{\sigma_0 \gamma}{\epsilon_0}$ "Plasmafrequenz"

$\uparrow$
gebundene Elektronen

Charakteristische Frequenzen:

Frequenzbereiche:

- $\gamma \ll \omega_{pl} < \omega_k$
- a) $\omega \ll \gamma$
 - b) $\gamma \ll \omega \leq \omega_{pl}$
 - c) $\omega > \omega_{pl}$

Radiowellen
Sichtb. Licht ($\approx 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$)
Röntgenstrahlen ($\approx 10^{19} \text{ s}^{-1}$)

$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$



Falla) $\tilde{\epsilon}_r = n_0^2 - \frac{\omega_{pl}^2}{i\gamma\omega} = \gamma \frac{\delta_0}{\epsilon_0 \omega}$ „quasistat. Näherung“

$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{i\delta_0}{\epsilon_0 \omega}} = \sqrt{i\mu_0 \omega \delta_0}$ „Skinneffekt“

Fall b) $\tilde{\epsilon}_r = n_0^2 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} = -\left(\frac{\omega_{pl}}{\omega}\right)^2$, $\tilde{n} = i\kappa$, $k = i\kappa'$
analog Totalrefl. & exp. Abfall

Achtung: Mit räumlicher Dispersion $\epsilon_r(\omega, \underline{k})$ vernachlässigt.
↳ anomaler Skinneffekt

Fall c) $\left(\frac{\omega_{pl}}{\omega}\right)^2 \ll 1$ $\epsilon_r \approx n_0^2$ Leitungselektronen unwirksam, näherungsweise wie Dielektrikum

25.6.1992

11.10.5. Longitudinale Wellen

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \vec{E}) = i\vec{k} \epsilon \vec{E} = 0$

$\vec{k} \vec{E} = 0$

$\epsilon = 0$, Ann. Longitudinale Welle

○ $\vec{k} \parallel \vec{E}$, $\epsilon = 0$, Frequenzen?

Leiter $\tilde{\epsilon}_r = n_0^2 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \epsilon_r(\omega)$

„ideal“; keine gebundene Elektronen $n_0 = 1$, $\gamma = 0$

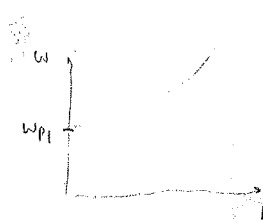
↳ $\tilde{\epsilon}_r = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}$, $\tilde{\epsilon}_r = 0$; $\omega = \omega_{pl}$ unabh. von $\vec{k}$

Longitudinale Welle besitzt kein Magnetfeld!

wg. $\vec{B} = -\text{rot } \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{B} = 0$

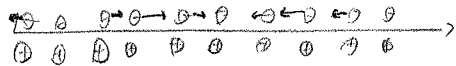
Leiter Fall $\epsilon(\vec{k}, \omega)$ räumliche Dispersion $\rightarrow$
 $\omega = \omega(k)$ Dispersion

Außerdem Dämpfung im realen Fall



Elektron $\Delta x \sim e^{ikx}$

Microscop. Erklärung



$\rho > 0$ $\rho < 0$

$\vec{E}$ rücktreibende Kraft $\rightarrow$ Oszillationen $\rightarrow$ Plasmafrequenz als Eigenfrequenz //

11. 10. 6. Gruppengeschwindigkeit LL 8

harmonische Welle: $u \sim e^{i(kx - \omega t)} = e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)}$

$c_{ph} = \frac{\omega}{k}$ Phasengeschwindigkeit

Vakuum $c_{ph} = c$, Medium $c_{ph} = \frac{c}{n}$

Dispersion $c_{ph}(\omega) = \frac{\omega}{n(\omega)}$

Überlagerung von 2 Wellen! unterschiedlicher Frequenz $\omega_{1/2} = \omega \pm \Delta\omega/2$

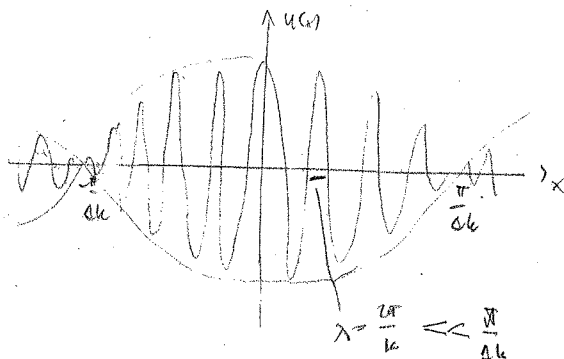
Wellenfunktion $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ $\Delta\omega \ll \omega$

$k_{1/2} = k \pm \Delta k/2$ $\Delta k \ll k$

$$u(x,t) = e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} = e^{-i(kx - \omega t)} \left(e^{i(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)} + e^{-i(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)} \right)$$

$$= e^{i(kx - \omega t)} \cdot 2 \cos \frac{\Delta k}{2} \left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t \right) = 2e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)} \cos \frac{\Delta k}{2} \left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t \right)$$

Schnell langsam veränderlich ($\Delta k \ll k$)



$c_{ph} = \frac{\omega}{k}$ (Verschiebung der schnell osz. Fkt.)

$c_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ (Verschiebung der Modulation)

$$\rightarrow \frac{\partial\omega}{\partial k}$$

Allgemein

$$u(\vec{r},t) = \int d^3k \tilde{u}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}$$

$\vec{k} = \vec{k}_0 + \vec{k}'$, $|\vec{k}'| \leq \Delta k$, Δk Breite der $\vec{k}$ -Verteilung

$t=0$: $u(\vec{r},t) = e^{i\vec{k}_0\vec{r}} \underbrace{\int d^3k' \tilde{u}(\vec{k}_0 + \vec{k}') e^{i\vec{k}'\vec{r}}}_{\phi(\vec{r}) \text{ langsam veränderlich}}$

$$t \neq 0: \quad w(\vec{k}) = \vec{w}(\vec{k}_0) + \left(\vec{k}' \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \right) w(k_0) + \frac{1}{2} \left(\vec{k}' \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \right)^2 w(k_0)$$

$$u(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega_0 t)} \int d^3k' \tilde{u}(\vec{k}_0 + \vec{k}') e^{i\vec{k}' \left(\vec{r} - \frac{\partial w}{\partial \vec{k}} \bigg|_{\vec{k}_0} \cdot t \right)} e^{-\frac{1}{2} \left(\vec{k}' \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \right)^2 w(k_0) t}$$

$\omega_0 = w(k_0)$

$$= e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega_0 t)} \phi \left(\vec{r} - \frac{\partial w}{\partial \vec{k}} \bigg|_{\vec{k}_0} \cdot t \right)$$

$$\rightarrow c_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad \vec{c}_{ph} = \frac{\vec{k}_0 \omega_0}{k_0^2}$$

$$\vec{c}_{gr} = \frac{\partial w}{\partial \vec{k}} \bigg|_{\vec{k}_0}$$

Gruppengeschwindigkeit: Signalgeschwindigkeit

$\Rightarrow$ Geschwindigkeit des Energietransports (!)

$\Rightarrow$ Geschwindigkeit der Ausbreitung physikalischer Störungen $\leq c$

c_{ph} dagegen kann $> c$ sein $\int$ meist $\vec{c} = c_{gr} \vec{n}$
 $\uparrow$
Energiedichte

Quadratische und folgende Terme (bisher vernachlässigt) können nicht in allen Fällen vernachlässigt werden, d.h. Näherung ungültig, bei $\left(\vec{k}' \frac{\partial w}{\partial \vec{k}} \right)^2 \omega t \approx 1 \rightarrow t \approx \frac{1}{(\Delta k)^2 \frac{\partial w}{\partial k^2}}$ (1dim)

$$\text{Dann } \tilde{u}(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega_0 t)} \phi \left(\vec{r} - \vec{c}_{gr} t, t \right)$$

$\uparrow$ Signalverzerrung

Definition von $\vec{c}_{gr}$ im Falle von Verzerrungen

$$\vec{r}_S = \langle \vec{r} \rangle = \frac{\int dV \vec{r} |u(\vec{r}, t)|^2}{\int dV |u(\vec{r}, t)|^2} \quad \text{"Schwerpunkt des Wellenpakets"}$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{c}_{gr} t$$

$$\vec{c}_{gr} = \frac{\int d^3k \frac{\partial w}{\partial \vec{k}} |\tilde{u}(\vec{k})|^2}{\int d^3k |\tilde{u}(\vec{k})|^2} = \left\langle \frac{\partial w}{\partial \vec{k}} \right\rangle \quad (\text{Bew. s. i.)}$$

Dispersionsfreier Fall

$$c_{ph} = c$$

$$\vec{c}_{gr} = \frac{\partial w}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial k} \frac{\partial w}{\partial k} = \frac{\vec{k}}{k} c \rightarrow c_m = c_{gr}$$

aber: $\frac{\partial}{\partial k} \otimes \frac{\partial w}{\partial k} \neq 0$ Verzerrung bei unterschiedlichen $\vec{k}$ -Richtungen

12. Wellenleiter und Resonatoren

(Nicht behandelt)

13. Kovariante Formulierung der E. dynamik

13.1. Raum-Zeit-Begriff und Lorentz-Transformation

↓ 13.1

Bezugssystem: Koordinatensystem zur Bestimmung der räumlichen Lage $\vec{r}$ eines Teilchens, zusammen mit Uhr für Zeit t .
 $\rightarrow$ Ort und Zeit sind relativ (abh. von Bezugssystem)

Inertialsystem: Bezugssystem, in dem ein sich frei bewegender Körper (d.h. auf den keine äußeren Kräfte wirken) eine konstante Geschwindigkeit besitzt.

Relativitätsprinzip: Naturgesetze gelten in jedem Inertialsystem in derselben Form. (Invariant, „Kovarianz“)

a) Galilei: Rel. prinzip + instantane Ausbreitung von Wirkungen
 (Kräfte hängen nur von ^{aktueller} Lage der Teilchen ab)
 Transformation von Inertialsystem K nach I. system K'
 (Galilei-Transf.):

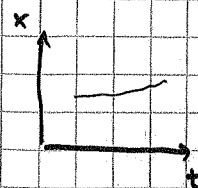
$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}t \\ t' &= t\end{aligned}$$

Relative Geschw.

b) Einstein: Rel. prinzip + Ausbreitung aller Wirkungen mit ^{Lichtgeschw.} c .
 $\rightarrow c$ hat in allen Inertialsystemen denselben Wert!
 $\rightarrow$ Lorentz-Transf. (u.a. Zeit nicht absolut)
 (wird in folgenden abgeleitet)

Vierdimensionaler Raum aus $\vec{r}, t$: $(\underbrace{ct}_{x^0}, \underbrace{x_1}_{x^1}, \underbrace{y_2}_{x^2}, \underbrace{z_3}_{x^3}) = x^i$ (Vierervektor)
(Minkowski-Raum)

In diesem Raum ist ein Ereignis ein Punkt,
ein Teilchen (Teilchenbahn) entspricht einer Linie („Weltlinie“).



In diesem Raum werden Abstände $\sqrt{\Delta s^2}$ (zwischen Ereignissen)
definiert nach

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$\text{bzw. } \Delta s^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

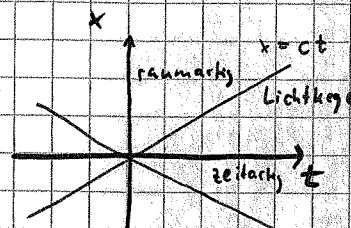
(Summation über doppelte Indizes implizit: $\sum_{\mu\nu}$)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Metrischer Fundamentaltensor
(Minkowski-Metrik)

Für Lichtausbreitung gilt $\Delta s = 0$.

(in allen Inertialsystemen!)

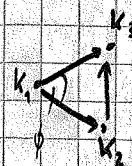


Wir betrachten jetzt 2 Inertialsysteme K, K' , die sich mit konstanter
Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegen, und 2 Ereignisse mit infinitesimalen
Abstand ds, ds' . Wir wollen beweisen, daß Lorentz-Transf. $ds = ds'$ bedeutet.

- Konstanz von $c \leadsto ds^2 = 0 \iff ds'^2 = 0 \leadsto ds^2 = a ds'^2$
(Abstand muß linear sein)

- Homogenität & Isotropie des Raums $\leadsto a = a(|\vec{v}|)$

- 3 Inertialsysteme K_1, K_2, K_3 :
 $ds_1^2 = a(v_{12}) ds_2^2$
 $ds_2^2 = a(v_{23}) ds_3^2$
 $ds_3^2 = a(v_{31}) ds_1^2$



$\leadsto a(v_{23}) = a(v_{13}) / a(v_{12})$. v_{23} muß aber von v_{12}, v_{13} und dem
Winkel ϕ abhängen (der aber nicht eingeht darf). $\leadsto \underline{a = 1}$ g.e.d.

$\leadsto \underline{s = s'}$ 4er-Abstand ist invariant unter Lorentz-Transf.

Zeitartige Abstände $\Delta s_{12}^2 > 0$

Für 2 Ereignisse mit zeitartigen Abstand, $\Delta s_{12}^2 > 0$, existiert Inertialsystem K' in dem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden:

$$(c \Delta t')^2 = (c \Delta t)^2 - \Delta \vec{r}^2, \quad (\Delta \vec{r}')^2 = 0$$

Raumartige Abstände $\Delta s_{12}^2 < 0$

Für 2 Ereignisse mit raumartigen Abstand, $\Delta s_{12}^2 < 0$, existiert K' , in dem beide Ereignisse gleichzeitig sind. (!) ($\leadsto$ Relativität der Gleichzeitigkeit)

$$-\Delta \vec{r}'^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta \vec{r})^2, \quad (c \Delta t')^2 = 0$$

Da Δs^2 Invariante ist, ist Unterteilung in raum- und zeitartige Abstände absolut (!).

Eigenzeit (eines Beobachters oder Teilchens)

Zeit, die von Uhr angezeigt wird, die sich mit Gegenstand mitbewegt. (Gegenstand kann sich dabei beliebig bewegen.)

Uhr mit $\wedge$ Koordinatensystem K' definiert momentanes Inertialsystem fest verbunden

Vergleiche Zeit dt in bel. Bz mit Eigenzeit $dt_E (= dt')$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 = c dt_E^2 - 0 \quad (d\vec{r}_E^2 = 0)$$

$$dt_E^2 = dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right) = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$$\underline{dt = \frac{dt_E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq dt_E} \quad \text{Zeitdilatation}$$

Lorentz - Transformation:

Transformation der Koord $(t, \vec{r})$ eines Ereignisses in Inertialsystem K in die Koord $(t', \vec{r}')$ desselben Ereignisses in K' . $[\vec{r}' = \vec{r}'(\vec{r}, t), t' = t'(\vec{r}, t)]$

- Prämissen:
- Homogenität von Raum & Zeit $\leadsto$ lineare Trafo
 - Lichtgeschwindigkeit konstant $\leadsto ds^2$ invariant

Spezielles Fall: K' bewegt sich relativ zu K mit Geschwindigkeit v entlang der x -Achse. Also $\vec{v} \parallel \hat{e}_x \parallel \hat{e}_{x'}$. (Drehung des 3er-Koordsystems keine.)

Ansatz:
(allg. linear)

$$\begin{aligned} x' &= a(x - vt) \\ t' &= b(t + wx) \\ y' &= y, \quad z' = z \end{aligned}$$

- Bewegung des Ursprungs $x' = 0$ mit v in $K \leadsto \underline{u = v = |\vec{v}|}$
- $\dashv$ $x = 0$ mit $-v$ in $K' \leadsto x' = -avt, t' = bt \leadsto \underline{a=b}$
- $ds^2 \stackrel{!}{=} ds'^2 \leadsto c^2 dt^2 - dx^2 = a^2 c^2 (dt + w dx)^2 - a^2 (dx - v dt)^2$

Koeff. vgl:

$$\left. \begin{aligned} dt^2: \quad c^2 &\stackrel{!}{=} a^2 (c^2 - v^2) \\ dx^2: \quad -1 &\stackrel{!}{=} a^2 (c^2 w^2 - 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 1 - \frac{v^2}{c^2} &= 1 - w^2 c^2 \leadsto w = \pm \frac{v}{c^2} \\ a &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

dxdt: $0 \stackrel{!}{=} 2a^2 c^2 w + 2a^2 v \leadsto w = -\frac{v}{c^2}$

$\leadsto$

$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $y = y', \quad z = z'$	$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
---	--

Spezielle Lorentz-Transformation ($v < c$!)

$(v/c \rightarrow 0 \leadsto \text{Galilei-Trafo})$

NICHT
KOMMUTATIV

[Allg. Lorentz-Trafo: Räumliche Drehung + spez. Lorentz-Trafo]

20.1.

Aus Lorentz-Transf. folgt z.B.

Längenkontraktion

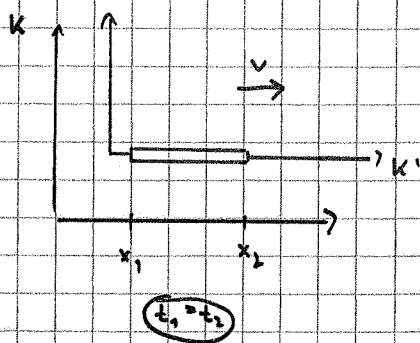
Objekt in K' in Ruhe, l_0 Ruhelänge

Wegen $x' = \frac{x - vt}{\gamma}$ folgt mit $\Delta x' = l_0$, $\Delta t = 0$ (in K): $l_0 = \frac{l}{\gamma}$

$$\leadsto \underline{l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < l_0} \quad \text{Längenkontraktion}$$

Achtung: Gleichzeitigkeit ist in K (dort wird Länge gemessen!)

(Falls Objekt ruht in K' heißt: Koordinaten in K' sind Punkte des Objekts)



Transformation der Geschwindigkeit

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\gamma}, \quad dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\gamma}$$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

bes. vektoriell:

$$\boxed{u_{||}' = \frac{u_{||} - v}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}}, \quad u_{\perp}' = \frac{u_{\perp} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}}}$$

Betrage:

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^2}$$

Grenzfälle: $v/c \rightarrow 0$, $u/c \rightarrow 0$: $u_{||}' = u_{||} - v$, $u_{\perp}' = u_{\perp}$

$$u = c \quad \leadsto \quad u' = c$$

13.2. Viergrößen und Kovarianz

Dreidimensionaler Raum: $\vec{r} = (x, y, z)$ Komponenten transformieren sich bei Drehung, $\vec{r}' = U \vec{r}$, U Drehmatrix, $\det U = \pm 1$
 Vektor $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ transformiert sich wie $\vec{r}$ bei Drehung.
 Skalar $\vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ invariant bei Drehung.

Vierdimensionaler Raum: (im Prinzip analog, aber hier nicht-euklidisch wegen Metrikdef.!)
Def.

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})$$

$$dx^\mu = (cdt, d\vec{r})$$

Die Transformationseigenschaften von x^μ, dx^μ sind bekannt: Lorentz-Transf. + Drehungen.

Explizit:

$$x^{0'} = \gamma (x^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x})$$

$$x^{i'} = \gamma (x^i - \beta x^0)$$

$$x^{z'} = x^z$$

$\vec{\beta} = \vec{v}/c$, $\beta = v/c$
 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Def. Kontravarianter Vektor

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} A^\mu$$

transformiert sich wie x^μ , d.h.

Def. Kovarianter Vektor

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$$

$$A_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} A_\mu$$

mit

Aus Transformationseigenschaften (s.v.) folgt

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \text{ metrischer Tensor}$$

Def. Skalarprodukt

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^\mu B_\mu$$

ist invariant unter Lorentz-Transf. wegen

Lorentz-Skalar

$$A' \cdot B' = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} A_\mu B'^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} A_\mu B'^\mu = A_\nu B'^\nu = A_\nu B^\nu = A \cdot B$$

Indexkontraktionen mit g :

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = dx_{\nu} dx^{\nu} \quad (x_{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu})$$

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \quad (x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu})$$

Tensoren: k kontravariant $F^{\mu\nu}$, kovariant $F_{\mu\nu}$, gemischt F^{μ}_{ν} (z.B. $F^{\mu\nu} = A^{\mu} A^{\nu}$ dyadisches Produkt, transformiert sich wie $x^{\mu} x^{\nu}$)

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \quad \text{etc.}$$

Ableitung: Wie transformiert sich $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$? $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$

↪ Differenzieren nach kontravarianten Koord. liefert kovariante Vektoren!

$$\partial^{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right)$$

$$\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right)$$

Divergenz ist invariant: $\partial_{\alpha} A^{\alpha} = \partial^{\alpha} A_{\alpha} = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \text{div } \vec{A} \quad (\text{nicht " - "})$

Wellen op ist invariant: $\partial_{\alpha} \partial^{\alpha} = \partial^{\alpha} \partial_{\alpha} = \square = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 - \vec{\nabla}^2$

⊗

Bemerkung: Manche Bücher benutzen alternative 4er-Schreibweise:

$$x^{\mu} = (\vec{r}, ict) = x_{\mu}$$

$$dx^2 = \sum dx^{\mu 2} = \vec{r}^2 - ct^2$$

Äquivalent, aber schlecht verallgemeinerbar (z.B. für ART)

⊗ Einsteinsches Relativitätsprinzip: (Gleichungen invariant unter Lorentztransf.)

↔ Gleichungen zwischen Vektoren (mit gleichen Transformationsregeln)

$$(\text{z.B. } A^{\mu} = B^{\mu} \Leftrightarrow A'^{\mu} = B'^{\mu})$$

Matrixschreibweise des Lorentz-Transformations:

$$x'^{\mu} = \Omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad \Omega^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

Spezielle Lorentz-Transformations von oben:

$$\Omega^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = v/c, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Mit beliebiger $\vec{v}$ -Richtung, aber ohne Drehung:

$$\Omega^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Lorentz-} \\ \text{Boost} \end{matrix} \quad (\det \Omega = +1)$$

Allg. Lorentz-Transformations: Kombination von Boost mit Drehungen im 3-dim. Ortsraum.

Lorentz-Gruppe hat 6 Generatoren: 3x Boost, 3x Drehungen

13.3. Relativistische Mechanik

(Kurz)

↓ 25.1.

Vierergeschwindigkeit:

gebildet mit Eigenzeit (nur die ist invariant!)

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_E} = \frac{(cdt, d\vec{r})}{\frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2}} = \frac{(c, \vec{v})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Test: $u^\mu u_\mu = \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} = c^2$ invariant

Vierersimpuls:

$$p^\mu = \frac{m_0 u^\mu}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad m_0 \text{ Körpereigenschaft: Ruhemasse, invariant}$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, \vec{v})$$

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$$

Viererkraft:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{dt_E} \quad (\text{Newton}) \quad (\sim \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v} \right) = \sqrt{1 - v^2/c^2} \vec{F})$$

$$\sim F^\mu = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{K}}{c}, \vec{K} \right) / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

wobei $\vec{K}$ die übliche Kraft ist
(nichtrel. $\vec{K} = \frac{d}{dt} (m \vec{v})$)

(Nullkomponente aus Invarianz von $u_\mu F^\mu$)

Energie:

Nullkomponente von $F^\mu = \frac{dp^\mu}{dt_E}$ liefert $\frac{d}{dt_E} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \vec{v} \cdot \vec{K}$ (Leistung).

~

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m c^2$$

mit geschwindigkeitsabh. Masse

$$m(\vec{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

~

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

$$p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2$$

~

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2$$

$v/c \ll 1$:

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{(m_0 c)^2}} \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0}$$

$v \rightarrow c$:

Aus $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ und $E < \infty$ folgt $m_0 = 0$.

$$\sim E = pc$$

13.4. Vierdimensionale Elektrodynamik

Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Vierestromdichte

$$j^\mu = (\rho c, \vec{j})$$

$$\hookrightarrow \text{Kontgl. } \partial_\mu j^\mu = 0$$

Bsp. Konvektionsstrom

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

$$\hookrightarrow j^\mu = \rho(c, \vec{v}) = \underbrace{\rho}_{\rho_0} \underbrace{\frac{(c, \vec{v})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_{u^\mu}$$

Plausibel: $dQ = \rho dV$

$$dV = dx dy dz = dx_0 \sqrt{dy dz dt}$$

(invariante
Ruheladungsdichte)

Elementarteilchen -
Experimente!

$$\sim dQ = \rho dV = \frac{\rho_0}{\gamma} \gamma dV_0 = \rho_0 dV_0 \hookrightarrow Q \text{ invariant}$$

ρ transformiert sich

Lorentzkraft

$$\vec{K} = q \left(\frac{c \vec{E}}{c} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

4dim

$$F^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu \quad (F^{\mu\nu} = \text{Feldstärketensor})$$

$$F^\mu = \underbrace{\left(\frac{\vec{K} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{K} \right)}_{\gamma}, \quad u_\nu = \frac{(c, -\vec{v})}{\gamma}$$

Die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ erhält man durch Koef. vgl.

Feldstärketensor

(Achtung: Jackson III
inkonsistent mit c)

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ +E_1/c & 0 & -B_3 & +B_2 \\ +E_2/c & +B_3 & 0 & -B_1 \\ +E_3/c & -B_2 & +B_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E}/c \\ \vec{E}/c & \vec{B} \times \vec{v} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\vec{B} \times \vec{v})_{kl} &= \partial_k (\vec{B} \times \vec{v})_l \\ &= (\vec{B} \times \vec{v})_{kl} \\ &= -(\vec{B} \times \vec{v})_{kl} \end{aligned}$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & \vec{B} \times \vec{v} \end{pmatrix}$$

Inhomogene Maxwell-Gl.

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 c \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \mu_0 c \rho \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned} \right\} \mu_0 \vec{j}$$



$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Test:

$$\partial_0 F^{00} + \partial_k F^{k0} = \mu_0 \rho c$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}/c = \mu_0 \rho c$$

$$\partial_0 F^{0k} + \partial_k F^{k0} = \mu_0 j^k$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}/c + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\vec{E} \times \vec{B})}_{\operatorname{rot} \vec{B}} = \mu_0 \vec{j}$$

Homogene Maxwell-Gl.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \vec{B} = 0$$



$$\partial_\alpha F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\alpha} = 0$$

Aktion: Tensor 3. Stufe

Test:

$$\chi_{\lambda\mu} = 123$$

$$-\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\chi_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{B}$$

$$\chi = 1 \quad \leadsto \quad 0 = 0$$

(* Blatt 13-12)

Vierpotentiale:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \vec{A}$$

$$\underline{A^\mu = (\varphi/c, \vec{A})}, \quad \underline{A_\mu = (\varphi/c, -\vec{A})}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$



$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad \text{Lorentz-Eichung } \partial_\mu A^\mu = 0$$

$$(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0) \quad \downarrow \quad 274$$

Manchmal kommt man den dualen Feldstärke tensor:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & 0 & E_3/c & -E_2/c \\ b_2 & -E_3/c & 0 & E_1/c \\ b_3 & E_2/c & -E_1/c & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{für } \alpha\beta\gamma\delta = 0123 \text{ oder gerade Permutation} \\ -1 & \text{ungerade Permutation} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann lauten homogene Maxwell - gl:

$$\underline{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0}$$

13.5. Transformation des el. mag. Feldes

Lorentz-Transform: $\Omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vektor-Transform: $A'^\mu = \Omega^\mu{}_\nu A^\nu$

Tensor-Transform: $F'^{\mu\nu} = \Omega^\mu{}_\alpha \Omega^\nu{}_\lambda F^{\alpha\lambda}$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel & B'_\parallel &= B_\parallel \\ E'_\perp &= \frac{E_\perp + \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & B'_\perp &= \frac{B_\perp - \vec{v} \times \vec{E}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Nichtrel. Grenzfall: $v/c \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel, & E'_\perp &= E_\perp + \vec{v} \times \vec{B} & \hookrightarrow & \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \\ B'_\parallel &= B_\parallel, & B'_\perp &= B_\perp & \hookrightarrow & \vec{B}' = \vec{B} \end{aligned}$$

Relat. Korrektur: $\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$

Alternative Ableitung:

$$\vec{K} = q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Transform. bekannt

$$\vec{K}' = q (\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}')$$

Transform. unbekannt

$\hookrightarrow$ Kaffeevergleich

(Galilei: $\vec{K} = \vec{K}'$, $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$: $\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}' = \vec{E} + (\vec{u}' + \vec{v}) \times \vec{B}$)

$\forall \vec{u}'$: $\vec{B}' = \vec{B} \quad \hookrightarrow \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$

Invarianten: $\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = B^2 - E^2/c^2$

$$\frac{1}{8} F^{\mu\nu} F^{\alpha\lambda} \epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c}$$

Potential einer gleichförmig bewegten Punktladung:

Ruhesystem $\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'}$, $\vec{A}' = 0$

Da $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$ ein Vierervektor ist $\rightarrow$ Lorentz-Transf. mit $(-v)$:

Bewegen ist: $\phi(\vec{r}, t) = \gamma \phi'$, $\vec{A} = -\gamma \beta \phi'$, $\beta = -\frac{v}{c}$

Transf. der Koordinaten:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{\left((x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi} \frac{\gamma}{\left((x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

(Spezialfall von Liénard-Wiechert aus Kap 8.7.)

13.6. Lorentz - Kraft - Dichte

Lorentz - Kraft

$$\vec{K} = Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\leadsto F^\mu = Q u_\nu F^{\mu\nu}$$

-||- Kraft-Dichte

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\leadsto f^\mu = j_\nu F^{\mu\nu}$$

$$(j^\mu = \rho_0 u^\mu; \rho_0 \text{ invariant!})$$

Test: ($k=1,2,3$)

$$f^k = j_0 F^{k0} + j_e F^{ke} = j_0 F^{k0} - j_e F^{ek} \quad (j_e = -\vec{j})$$

$$\vec{f} = \rho c \frac{\vec{E}}{c} + \vec{j} (\vec{B} \times \vec{B}) = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$f^0 = j_0 F^{00} + j_e F^{0e} = \frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{c} = -\frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Energiedichte für elektromagnetische Energie
($\vec{j} \cdot \vec{E} \rightarrow$ Joulesche Wärme)

$$\underline{f^\mu = \left(\frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{c}, \vec{f} \right) = \left(-\frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}, \vec{f} \right)} \quad \left(\text{vgl. } F^\mu = \left(\frac{\vec{K} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{K} \right) \right)$$

Bem. f^μ hat kein Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, da durch invariantes Volumenelement dividiert wird:

$$f^\mu = \frac{dF^\mu}{dV_0} = \frac{dF^\mu}{dV} \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}$$

13.7. Energie - Impuls - Tensor

13-16

Wir wissen:

$$\dot{w} + \operatorname{div} \vec{S}_p = v = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\dot{\vec{p}} + \operatorname{div} \vec{T} = -\vec{f}$$

Zusammenfassen in 4er-Gleichung:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -f^\mu$$

mit

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & \vec{S}_p/c \\ \vec{g}c & \vec{T} \end{pmatrix}$$

(Allgemein für alle Feldtheorien
(z.B. Kontinuumsmechanik): Energie- und
Impulsdichte in Tensorgleichung)

Aus bekannten Transformationen gehen von $T^{\mu\nu}$ (Vierertensor) folgen Trafo von $w, \vec{T}, \vec{S}_p$.

Zusammenhang mit Feldern:

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2, \quad \vec{S}_p = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

$\Rightarrow T^{\mu\nu}$ ist quadratisch in $F^{\mu\nu}$.

Wie kann man aus $F^{\mu\nu}$ & $F^{\kappa\lambda}$ einen zweistufigen Tensor bauen? $\left\langle \begin{matrix} F^{\mu\kappa} F_\kappa^\nu \\ g^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \end{matrix} \right.$

Ansatz: $T^{\mu\nu} = \alpha F^{\mu\kappa} F_\kappa^\nu + \beta F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} g^{\mu\nu}$

Explizit vergleichen $\leadsto \alpha = 1/\mu_0, \beta = 1/4\mu_0$

$$\leadsto T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\kappa} F_\kappa^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \right)$$

$T^{\mu\nu}$ ist symmetrisch: $T_1^{\nu\mu} = F^{\nu\kappa} F_\kappa^\mu = F_\kappa^\nu F^{\kappa\mu} = (-F^{\mu\kappa})(-F_{\kappa}^\nu) = T_1^{\mu\nu}$
 $\leadsto \vec{g} \cdot c = \vec{S}_p/c$ $\uparrow$ F antisymm.

$T_{xy} = T_{yx}$ (Drehimpuls - Erhaltung)

Bemerkung:

Mechanik

$$T_m^{\mu\nu}$$

$\leadsto$

$$\partial_\nu T_m^{\mu\nu} = f^\mu$$

E.dyn

$$T_{elm}^{\mu\nu}$$

$\leadsto$

$$\partial_\nu T_{elm}^{\mu\nu} = -f^\mu$$

$\leadsto$

$$T^{\mu\nu} = T_m^{\mu\nu} + T_{elm}^{\mu\nu}$$

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

Globale Energie- & Impulserhaltung