

Theoretische Physik A

EINFÜHRUNG IN DIE THEORETISCHE PHYSIK

Vorlesung WS 2002/03 (2 stdg.)

P. Wölfle

Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Fakultät für Physik

Universität Karlsruhe

Homepage: <http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre/>

Textverarbeitung: D. Scherer

Kapitel 0

Einleitung: Was ist theoretische Physik?

Physik ist die grundlegende Naturwissenschaft. Ziel der Physik ist die Aufdeckung und mathematische Beschreibung der Gesetze, denen die unbelebte Natur folgt. Die dafür in den letzten drei Jahrhunderten entwickelte Strategie beruht auf zwei Komponenten:

- 1) dem gezielten Experimentieren (im Unterschied zur reinen Naturbeobachtung)
- 2) der Interpretation der Messergebnisse durch Aufstellen möglichst allgemeiner mathematischer Zusammenhänge zwischen den Messgrößen.

Beide Komponenten sind notwendig, um eine umfassende und aussagekräftige Naturbeschreibung zu erhalten. Ausgangspunkt einer theoretisch-mathematischen Formulierung der Naturgesetze ist immer das Experiment, ebenso wie die endgültige Entscheidung über die Richtigkeit einer Theorie immer durch den Vergleich mit dem Experiment getroffen wird.

Im Laufe des 20. Jahrhunderts ist die Spezialisierung in der Physik so weit fortgeschritten, dass eine Arbeitsteilung in Experimentalphysik und theoretische Physik sinnvoll erschien. In der theoretischen Physik hat sich dabei ein erstaunliches Maß an Universalität herausgebildet, so dass ganz verschiedene Gebiete der Physik durch ähnliche Prinzipien und Begriffsbildungen zu charakterisieren sind. Als Beispiel sei die Theorie der Turbulenz von Strömungen klassischer Flüssigkeiten und Gase genannt, in der ähnliche mathematische Methoden Anwendung finden, wie z.B. in der Elementarteilchenphysik.

Seit den 1960er Jahren spielen Symmetriebetrachtungen eine führende Rolle in der T.P. So hat man festgestellt, dass die bei höchsten Energien erzeugten Elementarteilchen einschneidenden Symmetrieprinzipien genügen, die eine stark vereinheitlichte theoretische Beschreibung ermöglichen. Ähnliche Prinzipien wurden, z.T. schon früher, in der Festkörperphysik entdeckt und werden, insbesondere nach der Entdeckung neuartiger Materialien, immer weiter entwickelt.

Die theoretische Physik ist heute auf vielen Gebieten mit völlig neuen Fragestellungen und Entwicklungen konfrontiert, die einen Strom neuer Ideen und Denkweisen hervorrufen. Dies ist erstaunlich, denn die Physik ist eine „alte Wissenschaft“, findet eine Erklärung aber darin, dass die Physik weit gefasst und neuen Problemstellungen gegenüber offen und flexibel ist.

In dieser ersten Vorlesung über Theoretische Physik wird anhand der Newton'schen Mechanik der Massenpunkte eine Einführung in die Denkweise der T.P. gegeben. Parallel dazu wird das mathematische

Rüstzeug für die ersten Semester vermittelt. Dabei soll sowohl die Begriffsbildung und Strukturbildung in der T.P. verdeutlicht werden, als auch die Fertigkeit vermittelt werden, physikalische Vorgänge der Mechanik zu berechnen.

Gegenstand der Mechanik ist die Untersuchung von Anordnungen von Materie (Masse!), die entweder statisch sind oder sich in Bewegung befinden. Dabei werden wir uns zunächst auf die Betrachtung sogenannter Massenpunkte beschränken, die als Idealisierung von Körpern anzusehen sind, deren innere Freiheitsgrade wie Rotation und Schwingung vernachlässigt werden sollen, so dass man sich deren Masse als im Schwerpunkt vereinigt vorstellen kann. Später werden wir starre Körper betrachten und einen kurzen Überblick über die Mechanik der Kontinua, also der Flüssigkeiten und elastischen Medien geben.

Kapitel 1

Newton'sche Mechanik

1.1 Grundbegriffe und Mathematische Hilfsmittel

Bahnkurve eines Teilchens

Gegeben sei ein *kartesisches Koordinatensystem* $K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ im 3-dimensionalen euklidischen Raum mit den Einheitsvektoren \vec{e}_i

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

$\delta_{i,j}$ = „Kronecker-Delta“

Vektoren \vec{a}, \vec{b}, \dots lassen sich darstellen bezüglich K als

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i \quad , \quad \vec{b} = \sum_i b_i \vec{e}_i$$

wobei a_i = Komponenten von \vec{a} bezüglich K .

Die Länge von \vec{a} ist

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\sum_i a_i^2}$$

Der Winkel φ zwischen Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist gegeben durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Die Position eines Teilchens (Massenpunktes) mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 lässt sich als *Ortsvektor* \vec{r} , d.h. den Vektor vom Ursprung zum Punkt P darstellen:

$$\vec{r} = \sum_i x_i \vec{e}_i$$

$$\text{Länge: } r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Falls die Position des Teilchens sich als Funktion der Zeit t ändert, durchfährt der Ortsvektor die *Bahnkurve* des Teilchens:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \sum_i x_i(t) \cdot \vec{e}_i$$

Hierbei wurde der Begriff *Zeit* eingeführt. Allgemein ist die Zeit ein Parameter, der einen Bewegungsablauf charakterisiert. Zur Messung der Zeit ist deshalb eine *periodische Bewegung*, also eine sich exakt wiederholende Bewegung, am besten geeignet. Beispiele sind die Erdbewegung um die Sonne, die Erddrehung, Pendelschwingungen, Schwingungen eines Quarzkörpers, Schwingungen der elektromagnetischen Strahlung eines Atoms (Atomuhr).

Die *Geschwindigkeit* \vec{v} eines Teilchens ist die pro Zeit zurückgelegte Länge:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \sum_i \dot{x}_i(t) \cdot \vec{e}_i$$

Die Richtung von $\vec{v}(t)$ zeigt entlang der *Tangente* an die Bahnkurve im Punkt $\vec{r}(t)$. Der Betrag der Geschwindigkeit ist durch die zeitliche Änderung der Bogenlänge der Bahnkurve, $s(t)$, gegeben:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{\sum_i \dot{x}_i^2(t)} = \sqrt{\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dt^2}} = \frac{ds}{dt}$$

wobei das Differential der Bogenlänge $ds = \sqrt{\sum_i dx_i^2}$ benutzt wurde.

Die Beschleunigung \vec{a} des Teilchens ist die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \ddot{\vec{r}} = \sum_i \ddot{x}_i(t) \cdot \vec{e}_i$$

1. Beispiel: Konstante Beschleunigung $\vec{a}(t) = \vec{a} = \text{const.}$

$$\vec{v}(t) = \int_0^t dt' \vec{a}(t') = \vec{a}t + \vec{v}(0)$$

$$\vec{r}(t) = \int_0^t dt' \vec{v}(t') = \frac{1}{2} \vec{a}t^2 + \vec{v}(0)t + \vec{r}(0)$$

Wahl des Koordinatensystems so, dass

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -a\vec{e}_3 \quad , \quad \vec{v}(0) = v_1\vec{e}_1 + v_3\vec{e}_3 \\ x_1(t) &= v_1t \quad , \quad x_3(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_3t \end{aligned}$$

Bahnkurve $x_3 = x_3(x_1)$: Ersetze $t = \frac{x_1}{v_1}$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \frac{a}{v_1^2} x_1^2 + \frac{v_3}{v_1} x_1 \quad \text{Parabel}$$

2. Beispiel: Kreisbahn in der Ebene $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ mit konstanter Geschwindigkeit

$$|\vec{v}(t)| = \text{const.} = \omega R \quad |\vec{r}(t)| = R$$

$R = \text{Radius}$, $\omega = \text{Winkelgeschwindigkeit}$

$$\vec{r}(t) = R(\cos \omega t \cdot \vec{e}_1 + \sin \omega t \cdot \vec{e}_2)$$

Andere Darstellungen der Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), t(\lambda) & \text{Parameterdarstellung} \\ r(t), \varphi(t), z(t) & \text{Polarkoordinaten} \\ r(t), \Theta(t), \varphi(t) & \text{Kugelkoordinaten} \end{cases}$$

Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & y &= r \sin \varphi \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} & \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Für Situationen mit Zylindersymmetrie ist es nützlich, ein *lokales* Koordinatensystem einzuführen: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$
Damit lässt sich das Vektordifferential $d\vec{r}$ so ausdrücken (in der Ebene):

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_1 + dy \cdot \vec{e}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \vec{e}_2 = dr \cdot \vec{e}_r + r d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\text{mit } \vec{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2$$

$$\text{und } \vec{e}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{e}_2 \right) \frac{1}{r} = -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2$$

Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind dann

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r(t) \cdot \vec{e}_r(t) \\ \vec{v}(t) &= \dot{r} \vec{e}_r(t) + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi(t) \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \\ \vec{a}(t) &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r(t) + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi(t) \end{aligned}$$

Beispiel 2 stellt sich dann so dar:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= R \vec{e}_r \\ \vec{v}(t) &= \omega R \vec{e}_\varphi \\ \vec{a}(t) &= -\omega^2 R \vec{e}_r \end{aligned}$$

woraus der Nutzen der symmetrieangepassten Darstellung unmittelbar ersichtlich ist.

1.2 Die Newton'schen Axiome

In seinem Werk „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“ postulierte Isaac Newton 1687 drei Axiome, die Aussagen über die Bahnkurven von Massenpunkten darstellen. Abgesehen von einigen Ergänzungen und Verallgemeinerungen im 19. Jahrhundert waren diese Axiome die Grundlage der Mechanik bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts, als die Grenzen der Gültigkeit für sehr schnell bewegte und für sehr kleine Teilchen entdeckt wurden.

1. Axiom: Kräftefreie Körper bewegen sich geradlinig und gleichförmig.

Dabei bedeutet „geradlinig“ die Bewegung auf einer Geraden, „gleichförmig“ eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

Interpretation:

a) „Kräftefreie“ Körper sind solche, die „sich selbst überlassen“ sind. Das bedeutet, dass andere Körper, mit denen eine Wechselwirkung möglich ist, hinreichend weit entfernt sind, bzw. Kraftfelder (Gravitation, elektromagnetisches Feld) nicht vorhanden oder kompensiert sind.

b) „Geradlinig“ und „gleichförmig“ war für Newton bezogen auf einen „absoluten“ Raum (euklidisch) und eine „absolute“ Zeit. Heute interpretiert man das 1. Axiom so:

„Es gibt Raum-Zeit-Systeme (euklidische Koordinatensysteme und Zeitskalen), in welchen kräftefreie Körper sich geradlinig und gleichförmig bewegen ($\vec{v} = \text{const.}$). Diese heißen *Inertialsysteme*.“

c) „Körper“ bedeutet bei Newton *Massenpunkt*, also ein mechanisches System ohne „innere“ Freiheitsgrade.

2. Axiom: In Inertialsystemen erfahren Massenpunkte Beschleunigungen proportional zur einwirkenden Kraft.

„Kraft“ ist hier ein Sammelbegriff für Ursachen, die eine Beschleunigung von Massenpunkten hervorrufen können. Wie diese Kräfte zustandekommen, ist Gegenstand anderer Theorien wie z.B. über Gravitation, Elektromagnetismus, Elastomechanik, etc.

Kräfte sind Vektoren (\vec{F}). Die Wirkung einer Kraftquelle (z.B. gespannte Feder oder Automotor) auf einen anderen Körper hängt von einer Eigenschaft des Körpers ab, die man „träge Masse m “ nennt, und die als Proportionalitätskonstante zwischen Beschleunigung \vec{a} und Kraft \vec{F} wirkt:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Massenbestimmung:

Dieselbe Kraft \vec{F} wirke auf zwei Körper mit Massen m_1, m_2 .

$$F = m_1 a_1 \quad F = m_2 a_2$$

$$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

Messung der Beschleunigung gibt ein Maß für die Masse.

Dynamische Kraftmessung:

Verschiedene gleichgerichtete Kräfte wirken auf die gleiche Masse m .

$$F_1 = ma_1 \quad F_2 = ma_2$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

Es gibt Situationen, in denen sich die Masse eines Körpers zeitlich ändert (Rakete!). Es ist dann günstig, als neue Bewegungsgröße den *Impuls* \vec{p} zu definieren:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Das 2. Axiom lautet dann $\boxed{\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}}$

3. Axiom: Die Kraftwirkungen zweier Massenpunkte aufeinander („Wechselwirkungen“) sind entgegengesetzt gleich. (actio = reactio)

Sei \vec{F}_{12} die Kraft, mit der m_2 auf m_1 , und \vec{F}_{21} die Kraft, mit der m_1 auf m_2 wirkt. Dann gilt

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

$$\text{Folgt } m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\text{oder Gesamtimpuls } \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{const.}$$

Der Gesamtimpuls \vec{p} ist eine *Erhaltungsgröße*.

Zusatz 1: Wirken mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt, so wirkt jede Kraft so, als wäre sie alleine vorhanden („Superpositionsprinzip“) $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

Zusatz 2: Kräfte, die zwei Massenpunkte aufeinander ausüben, wirken in der Richtung der Verbindungslinie.

1.3 Gravitation

Die Gravitation ist eine spezielle Kraftwirkung zwischen Körpern aller Art, die eine Anziehung bewirkt. Körper auf der Erdoberfläche werden von der Erdmasse angezogen. Diese Kraft heißt *Gewicht*. Messung, z.B. mit der Federwaage, ergibt:

$$\vec{G} = m_s \vec{g} \quad , \quad g = |\vec{g}| \cong 9,81 \frac{m}{s^2}$$

\vec{G} = Vektor des Gewichts, zum Erdmittelpunkt gerichtet

m_s = „*schwere Masse*“, eine Eigenschaft jedes Körpers

\vec{g} = Vektor der „*Erdbeschleunigung*“

Durch Messung von \vec{G} lässt sich m_s bestimmen. Man findet:

$$m_s = m$$

d.h. träge und schwere Masse sind gleich. Dies wurde experimentell mit hoher Genauigkeit überprüft.

Freier Fall

Ein Körper fällt unter dem Einfluss der Gravitation entsprechend der Newton'schen Bewegungsgleichung

$$m\vec{a} = m_s\vec{g} \quad \text{oder} \quad \vec{a} = \vec{g}$$

mit konstanter Beschleunigung.

Damit gilt:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0$$

Mit der Wahl des Koordinatensystems so, dass

$$\vec{g} = (0, 0, -g); \quad \vec{v}_0 = (v_{0x}, 0, v_{0z}); \quad \vec{r}_0 = 0$$

$$\text{ist} \quad x = v_{0x}t \quad y = 0 \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$$

Die Bahnkurve ist eine „Wurfparabel“, mit Abwurfwinkel α :

$$\tan \alpha = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}; \quad v_{0z} = v_0 \sin \alpha; \quad v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \quad v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0z}^2}$$

Man eliminiert die Zeitvariable mittels $t = \frac{x}{v_{0x}}$ und erhält die Bahnkurve $z(x)$:

$$z(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}\left(x - \frac{1}{g}v_{0z}v_{0x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{v_{0z}^2}{g}$$

Daraus folgen die Scheitellage $x = \frac{w}{2}$ und -höhe $z\left(\frac{w}{2}\right) = h$ und damit

$$\text{Wurfweite } w = 2\frac{v_{0z}v_{0x}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

$$\text{Wurfhöhe } h = \frac{1}{2}\frac{v_{0z}^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha$$

Die Maximalwerte bei festem v_0 werden erreicht für w bei $\alpha = 45^\circ$ und für h bei $\alpha = 90^\circ$.
Die Wurfdauer ist

$$t_0 = \frac{w}{v_{0x}} = 2 \frac{v_0}{g} \sin \alpha$$

Energiesatz, potentielle und kinetische Energie

Die Newton'sche Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse m im (konstanten) Schwerfeld der Erde,

$$m\ddot{\vec{r}} - \vec{G} = 0$$

lässt sich nach Multiplikation mit $\dot{\vec{r}}$ einmal integrieren, denn

$$m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right)$$

und $\vec{G} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\vec{G} \cdot \vec{r})$

Damit folgt aus der Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 - \vec{G} \cdot \vec{r} \right) = 0$$

und durch Integration der *Erhaltungssatz*

$$\frac{m}{2} v^2 - \vec{G} \cdot \vec{r} = E = \text{const.}$$

Die Größe E ist die *Gesamtenergie* des Massenpunktes m im Kraftfeld \vec{G} . Sie setzt sich additiv zusammen aus der *kinetischen Energie* $T = \frac{m}{2} v^2$ und der *potentiellen Energie* $V(\vec{r}) = -\vec{G} \cdot \vec{r} = -Gz$.

Energieerhaltungssatz $T + V = E$

Aus obiger Ableitung folgt, dass eine potentielle Energie $V(\vec{r})$ eine Kraft bedingt:

$$F_z = -\frac{d}{dz} V(\vec{r}); \quad \vec{F} = (0, 0, F_z)$$

Beweis: $\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) = \dot{z} \cdot \frac{d}{dz} V(\vec{r}) = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$

Gravitationsgesetz allgemein

Der Ausdruck $\vec{G} = m\vec{g}$ ist eine Näherung für die Erdanziehung von Körpern direkt an der Erdoberfläche. Allgemein gilt für die Gravitationskraft \vec{G}_{12} , die eine Masse m_2 auf eine Masse m_1 im Abstand r_{12} ausübt:

$$\vec{G}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_{12}}$$

dabei sind \vec{r}_1, \vec{r}_2 die Ortsvektoren der Massen m_1 und m_2 und $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Der Vektor $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_{12}}$ ist ein Einheitsvektor in Richtung von m_2 auf m_1 . Man kann zeigen, dass die Gravitationskraft nicht von dem Radius einer kugelförmigen Massenverteilung abhängt (\rightarrow Massenpunkt).

γ ist die *Gravitationskonstante*: $\gamma = 6,67 \cdot 10^8 \frac{\text{cm}^3}{\text{g s}^2}$

Die Erdbeschleunigung \vec{g} ergibt sich in der Näherung $r_{12} \simeq R = \text{Erdradius}$ aus

$$\vec{G} = -\gamma \frac{mM}{R^2} \hat{R} \equiv m\vec{g}$$

also $|\vec{g}| = g = \gamma \frac{M}{R^2}$, wobei M die Erdmasse ist. Genauere Messungen ergeben kleine Abweichungen aufgrund der Abplattung der Erde, inhomogener Massenverteilungen, etc.

Kapitel 2

Harmonischer Oszillator

Harmonische Schwingungsbewegungen treten in der Natur in vielen Formen auf, jedenfalls als idealisierte Bewegungsform. Der harmonische Oszillator ist das wichtigste Modell eines dynamischen Systems, das sich exakt lösen lässt.

2.1 Beispiele für den harmonischen Oszillator

a) Schwingende Feder

Federkraft:

Bei der Auslenkung einer Stahlfeder aus ihrer Ruhelage setzt diese der angreifenden Kraft eine Rückstellkraft entgegen. Für nicht zu große Auslenkungen ist die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung:

$$F = -kx \quad k = \text{const.} > 0 \text{ (Federkonstante)}$$

Falls die Bewegung nur in x-Richtung stattfinden kann (eindimensionale Bewegung), gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{oder}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0$$

Das ist die Bewegungsgleichung eines *eindimensionalen, freien, ungedämpften harmonischen Oszillators*. Ergänzung: Falls die äußere Kraft nicht streng linear in x ist, sondern andere Komponenten, z.B. $\propto x^2$ oder $\propto x^3$ enthält, spricht man vom *anharmonischen Oszillator*. Eine Lösung ist in diesem Fall i.A. nicht analytisch zu erhalten.

b) Fadenpendel

„Faden“ konstanter Länge l (masselos) mit Masse m am Endpunkt, unter Einfluss der Schwerkraft.

Für die Bewegung ist nur die Tangentialkomponente F des Gewichts wichtig (Bewegung in der Zeichenebene)

$$F = -mg \sin \varphi$$

wobei $F > 0$, da F der Auslenkung φ entgegenwirkt. Die Normalkomponente von G in Fadenrichtung wird von der Fadenspannung kompensiert. Für kleine Auslenkungen $\varphi \ll 1$ gilt mit $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$F \approx -mg \varphi$$

Die Bewegung der Masse m verläuft auf einem Kreisbogen mit Radius l . Die zurückgelegte Wegstrecke s ist die Bogenlänge $s = l\varphi$. Die Newton'sche Bewegungsgleichung ist damit

$$m\ddot{s} = ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi \quad \text{oder}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0} \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{g}{l} > 0$$

c) Schwingungen eines 2-atomigen Moleküls

Als klassisches Modell eines Moleküls betrachten wir zwei Massenpunkte m_1 und m_2 (die Atome 1 und 2), die eine Ruhelage im Abstand a besitzen. Für die Bewegung der Atome in der x -Richtung existiert ein Potential $V(x_2 - x_1)$, aufgrund dessen m_2 auf m_1 die Kraft F_{12} und m_1 auf m_2 die Kraft F_{21} ausübt, wobei

$$F_{12}(x_2 - x_1) = -\frac{dV}{dx_1} = \frac{d}{dx_2}V(x_2 - x_1) = -F_{21}$$

Für $x_2 - x_1 = a$ muss gelten: $\frac{d}{dx_1}V(x_2 - x_1) = 0$
Im Bereich kleiner Auslenkungen um die Ruhelage ist

$$F_{12}(x_2 - x_1) = F_{12}(a + u) = F_{12}(a) + \frac{F(a + u) - F(a)}{u} \cdot u \simeq F_{12}(a) + u \cdot \left[\frac{dF}{dx} \right]_{x=a} = 0 + u \cdot \frac{d^2}{dx^2}V(x) \Big|_{x=a}$$

(Taylorentwicklung)

Damit sind die Bewegungsgleichungen:

$$m_1\ddot{x}_1 = (x_2 - x_1 - a)V''(a)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -(x_2 - x_1 - a)V''(a)$$

wobei $V''(a) = \frac{d^2}{dx^2}V(x)|_a$

Einführung der Relativvariablen $u = x_2 - x_1 - a$ gibt

$$\ddot{u} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)V''(a) \cdot u$$

$$\text{oder } \boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0} \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} V''(a) > 0$$

Wenn die Gleichgewichtslage stabil sein soll, muss sie einem *Minimum* des Potentials $V(x)$ entsprechen und damit ist $V''(a) > 0$.

Mathematischer Einschub: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition: Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$ und ihre Ableitungen $y^{(1)} = \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df}{dx}$, $y^{(2)} = \frac{d^2y}{dx^2}$, etc.

Eine Gleichung der Form

$$\phi(y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}; x) = 0$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung (DG) n-ter Ordnung*.

Beispiel: $m\ddot{x}(t) = K(x(t))$ ist eine DG 2. Ordnung.

DG 2. und höherer Ordnung sind i.A. nicht analytisch lösbar, d.h. die Lösung lässt sich nicht durch elementare oder höhere transzendente Funktionen oder durch einen Integralausdruck darstellen.

Spezialfälle:

a) Lineare DG: $\sum_{i=1}^n g_i(x)y^{(i)}(x) + y(x) + g_0(x) = 0$

b) Lineare DG mit konstanten Koeffizienten: $g_i(x) = g_i = \text{const.}$

c) Homogene, lineare DG mit konstanten Koeffizienten: $g_0(x) = 0$

$\Rightarrow y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y(x) = 0$

Lösungsansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$, mit $y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ „charakteristisches Polynom“

n Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ergeben n linear unabhängige Lösungen: $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$

Jede Linearkombination $y(x) = \sum_i c_i e^{\lambda_i x}$ ist Lösung der DG.

d) DG 2. Ordnung, die nicht explizit von x und von y' abhängen:

$$y' \cdot y'' = f(y(x)) \rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} f(y) = \frac{d}{dx} \int_{y_0}^{y(x)} dy' f(y') \quad ; \quad \frac{dF}{dy} = f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - F(y) \right] = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - F(y) = \text{const.}$$

e) DG 1. Ordnung mit getrennten Variablen

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx$$

$$\text{Spezialfall: } g(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{dy}{f(y)} + \text{const.}$$

Ende des Einschubs

2.2 Freier, ungedämpfter harmonischer Oszillator

Energiesatz:

Beispiel der elastischen Feder:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad | \cdot \dot{x}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 \right) = \frac{d}{dt} (T + V) = 0$$

$$\text{Kinet. Energie: } T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad \text{Pot. Energie } V = \frac{k}{2} x^2$$
$$T + V = E = \text{const.}$$

Lösung der Differentialgleichung: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Mathematischer Einschub: Eigenschaften der linearen DG 2. Ordnung

Die lineare DG 2. Ordnung besitzt zwei *linear unabhängige* Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, d.h.

$$(I) \quad a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) = 0 \quad \text{für } t \in [t_a, t_b]$$

kann nur erfüllt werden mit $a_1 = a_2 = 0$.

Falls (I) gilt mit $a_1, a_2 \neq 0$, sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ *linear abhängig*. Dann gilt auch:

$$(II) \quad a_1 \dot{x}_1(t) + a_2 \dot{x}_2(t) = 0$$

(I) und (II) bilden ein lineares Gleichungssystem für a_1 und a_2 . Es existiert eine nichttriviale Lösung nur dann, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet:

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} \quad \text{„Wronski-Determinante“}$$

Wenn dagegen $\Delta(t) \neq 0$, sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ linear unabhängig (tatsächlich genügt es, wenn $\Delta(t_0) \neq 0$ für ein bestimmtes t_0 , da $\Delta(t)$ von t unabhängig ist).

Die allgemeine Lösung ist dann:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

Die Konstanten c_1, c_2 sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen, z.B. $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$:

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = x_0$$

$$c_1 \dot{x}_1(t_0) + c_2 \dot{x}_2(t_0) = v_0$$

Dieses lineare Gleichungssystem für c_1, c_2 hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\Delta(t_0) \neq 0$.

Ende des Einschubs

Lösungsweg A:

Funktionen $f(t)$, deren zweite Ableitung $f''(t)$ proportional zur Funktion selbst sind, und die einen oszillierenden Verlauf haben, sind die Winkelfunktionen:

$$f(t) = \sin t \quad f''(t) = -\sin t \quad \text{etc.}$$

Eine Skalierung des Funktionsarguments $t \rightarrow at$, so dass $f(t) = \sin(at)$, erzeugt einen Vorfaktor in $f''(t) = -a^2 \sin(at)$.

Durch Einsetzen in $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ bestätigt man, dass

$$x_1(t) = \cos \omega_0 t \quad \text{und} \quad x_2(t) = \sin \omega_0 t$$

Lösungen sind. Sie beschreiben „harmonische Schwingungen“ mit der Frequenz ω_0 , bzw. der Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

In den Beispielen ist

$$\text{Feder: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{Pendel: } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Durch Einsetzen in $\Delta(t)$ findet man $\Delta(t) = \omega_0 \neq 0$, d.h. die Lösungen sind linear unabhängig.

Für die Konstanten c_1, c_2 ergibt sich

$$c_1 = x_0 \quad c_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$\text{und damit} \quad x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega t - \alpha)$$

mit $\tan \alpha = \frac{v_0}{x_0 \omega_0}$, wobei das Additionstheorem der Winkelfunktionen benutzt wurde.

Lösungsweg B:

Jede lineare, homogene DG mit konstanten Koeffizienten lässt sich mit dem Ansatz lösen

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Einsetzen führt auf

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega_0^2}$$

Die Lösung dieser Gleichung erfordert eine Erweiterung des reellen Zahlenraums zum Raum der komplexen Zahlen (siehe mathem. Ergänzung).

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

Die beiden linear unabhängigen Lösungen sind

$$x_1(t) = e^{i\omega_0 t} \quad x_2(t) = e^{-i\omega_0 t}$$

und $\Delta(t) = -2i\omega_0 \neq 0$. Der Zusammenhang mit Lösungsweg A ist durch

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \quad \sin \omega_0 t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \text{ gegeben.}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

mit $c_{1,2} = \frac{1}{2}(x_0 \mp i \frac{v_0}{\omega_0})$.

Mathematischer Einschub: Komplexe Zahlen

Man definiert die *imaginäre Einheit* i als $i = \sqrt{-1}$ oder $i^2 = -1$.

Die allgemeine Form der *komplexen Zahl* ist $z = a + bi$, wobei a, b reell sind. Dabei ist a der Realteil, $a = \operatorname{Re}(z)$, und b der Imaginärteil von z , $b = \operatorname{Im}(z)$. Für $b = 0$ ist z eine reelle Zahl, für $a = 0$ ist $z = ib$ eine *rein imaginäre Zahl*. Die *konjugiert komplexe Zahl* ist definiert als $\bar{z} = a - ib$.

Komplexe Zahlen lassen sich in der komplexen Zahlenebene darstellen als Vektoren vom Ursprung zum Punkt z . Man definiert Länge r und den Winkel φ zur x-Achse.

Damit lässt sich schreiben:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad , \quad r = |z| \quad \varphi = \arg(z)$$

r ist der *Betrag*, φ das *Argument* oder die *Phase* von z .

Für $z = a + ib$ gilt: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ $-\pi < \varphi \leq \pi$
 $r^2 = z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Addition und Subtraktion sind definiert als

$$(a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2)$$

Multiplikation ist gegeben durch

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Division:

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Der Nenner wurde durch Erweiterung mit der konjugiert komplexen Zahl in eine reelle Zahl umgeformt.

Rechenbeispiele:

$$\begin{aligned}
 1 + 2i + 3 - i &= 4 + i \\
 (1 + 2i)(3 - i) &= 3 + 2 + i(6 - 1) = 5 + 5i \\
 \frac{1 + 2i}{3 - i} &= \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 - 2 + i(6 - 1)}{9 + 1} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i \\
 i^3 &= i^2 \cdot i = -i \quad , \quad i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1 \\
 &\text{damit } i^5 = i \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Funktionen einer komplexen Veränderlichen:

$$w = f(z) \quad , \quad z = x + iy \quad , \quad x, y \text{ reell}$$

Polynome: $w = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_0$, α_i komplex

Elementare transzendente Funktionen:

Exponentialfunktion $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ z.B. definiert über die Differentialbeziehung

$$\frac{d}{dy} e^{iy} = i e^{iy}$$

Aus der Eigenschaft der Funktion $f(y) = \cos y + i \sin y$

$$\frac{d}{dy} f(y) = -\sin y + i \cos y = i(\cos y + i \sin y) = i \cdot f(y)$$

ergibt sich die **Euler'sche Formel**:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

Jede komplexe Zahl lässt sich demnach schreiben als $z = r e^{i\varphi}$ mit r, φ wie früher definiert.

Eine allgemeine Potenz von z ist damit darstellbar als $z^\alpha = (r e^{i\varphi})^\alpha = r^\alpha e^{i\varphi\alpha}$

Für $\alpha = n$, ganz, folgt der *Satz von Moivre*: $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

Die Umkehrfunktion der (komplexen) Exponentialfunktion ist die Logarithmusfunktion

$$w = e^z \rightarrow z = \ln w$$

Wie für die reelle Logarithmusfunktion gilt: $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$. Damit lässt sich Real- und Imaginärteil von $\ln z$ explizit angeben:

$$\ln z = \ln(r e^{i\varphi}) = \ln r + \ln e^{i\varphi} = \ln r + i\varphi$$

Da die Phase φ von z nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist, ist die $\ln z$ -Funktion eine (unendlich) mehrdeutige Funktion.

Ende des Einschubs

2.3 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Jede in der Natur vorkommende Bewegung wird durch Reibung oder andere Dissipationsmechanismen gedämpft. Dies geschieht einfach dadurch, dass kein System vollständig von seiner Umgebung isoliert werden kann. Jede Kopplung des Oszillators an unendlich viele andere Freiheitsgrade („Umgebung“), mag sie auch noch so schwach sein, führt zu einer Energieabgabe und damit zur Verlangsamung der Bewegung.

Für kleine Geschwindigkeiten ist die Reibungskraft proportional der Geschwindigkeit und ihr entgegengesetzt:

$$F_R = -R\dot{x} \quad , \quad R > 0$$

Die Bewegungsgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator hat dann die Form

$$m\ddot{x} + kx + R\dot{x} = 0$$

$$\text{oder allgemein: } \ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad , \quad \rho = \frac{R}{m} > 0$$

Mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ ergibt sich das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \rho\lambda + \omega_0^2$ mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \omega_0^2}$$

Die Lösungen $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sind wieder linear unabhängig, denn die Wronski-Determinante $\Delta(t) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} = -2\sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \omega_0^2}e^{-\gamma t}$ ist $\neq 0$, es sei denn $\omega_0 = \frac{\rho}{2}$ (hier ist $\Delta(t)$ zeitabhängig).

Man kann drei Grenzfälle unterscheiden:

(i) Schwache Reibung: $\omega_0 > \frac{\rho}{2}$

Mit $\lambda_{1,2} = -\frac{\rho}{2} \pm i\Omega$ und $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\rho^2}{4}} < \omega_0$ sind die Lösungen zunächst

$$x_{1,2}(t) = e^{-\frac{\rho}{2}t} e^{\pm i\Omega t}$$

Durch Linearkombination lassen sich zwei reelle Lösungen bilden

$$x_c(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] = e^{-\frac{\rho}{2}t} \cos \Omega t$$

$$x_s(t) = \frac{1}{2i}[x_1(t) - x_2(t)] = e^{-\frac{\rho}{2}t} \sin \Omega t$$

die gedämpfte Schwingungen mit einer Dämpfungskonstante $\gamma = \frac{\rho}{2}$ beschreiben. Wir definieren eine *Relaxationszeit* $\tau = \frac{2}{\rho}$ als die Zeit, bei der die Schwingungsamplitude auf $\frac{1}{e}$ ihres Anfangswerts abgefallen

ist.

Das Anfangswertproblem $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ legt die Konstanten der allgemeinen Lösung so fest:

$$x(t) = e^{-\frac{\rho}{2}t} \left[x_0 \cos \Omega t + \frac{1}{\Omega} \left(v_0 + \frac{\rho}{2} x_0 \right) \sin \Omega t \right] = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left(v_0 + \frac{\rho}{2} x_0 \right)^2} \cdot e^{-\frac{\rho}{2}t} \cos(\Omega t - \alpha)$$

mit $\alpha = \arctan \frac{v_0 + \frac{\rho}{2} x_0}{x_0 \Omega}$

(ii) Starke Reibung: $\omega_0^2 < \frac{\rho}{2}$

$$x_{1,2}(t) = e^{-\gamma_{1,2}t} \quad , \quad \gamma_{1,2} = -\lambda_{1,2} = \frac{\rho}{2} \mp \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \omega_0^2} > 0$$

Diese Lösungen haben keinen Schwingungscharakter mehr, sondern nehmen exponentiell mit der Zeit ab. Das Anfangswertproblem führt auf

$$x(t) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} [(\gamma_2 x_0 + v_0) e^{-\gamma_1 t} - (\gamma_1 x_0 + v_0) e^{-\gamma_2 t}]$$

(iii) Aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = \frac{\rho}{2}$

In diesem Fall hat die charakteristische Gleichung nur eine Lösung: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{\rho}{2}$.

Die Lösungen λ_1, λ_2 sind „entartet“. Zu der einen Lösung

$$x_1(t) = e^{-\frac{\rho}{2}t}$$

kommt eine zweite Lösung der Form

$$x_2(t) = t \cdot e^{-\frac{\rho}{2}t}$$

Beweis: Aus den beiden Lösungen $e^{\lambda_{1,2}t}$ lassen sich Linearkombinationen bilden, z.B.

$$x_{\pm}(t) = \frac{1}{\lambda_1 \pm \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} \pm e^{\lambda_2 t})$$

die in Limes $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1 = \lambda$ übergehen in

$$x_+ = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \quad \text{und} \quad x_- = e^{\lambda t} \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{1 - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = e^{\lambda t} t$$

Wronski-Determinante $\Delta(t) = e^{-\rho t} \neq 0$

2.4 Erzwungene Schwingungen

Wenn ein schwingungsfähiges System, z.B. ein harmonischer Oszillator, durch eine zeitabhängige Kraft zu Schwingungen angeregt wird, spricht man von „erzwungenen Schwingungen“. Für die Feder ergibt sich dann die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx - R\dot{x} + F(t) \quad , \quad F(t) = \text{äußere Kraft}$$

$$\text{oder allgemein } \ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad \text{mit } f(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Dies ist eine *inhomogene* lineare DG 2.Ordnung. Die Gesamtheit ihrer Lösungen ist darstellbar als Summe aus einer speziellen (der sog. „partikulären“) Lösung und aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen *homogenen* DG, d.h. der DG für $f(t) = 0$.

$$x(t) = \tilde{x}(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

Dabei ist $\tilde{x}(t)$ die partikuläre Lösung, $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind die (früher behandelten) linear unabhängigen Lösungen der homogenen DG. In Folgenden nehmen wir den *schwach gedämpften* Fall an ($\omega_0 > \frac{\rho}{2}$). Bei gegebenem $\tilde{x}(t)$ werden die Konstanten c_1, c_2 durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$x(0) = x_0 = \tilde{x}(0) + c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = \dot{\tilde{x}}(0) + c_1 \dot{x}_1(0) + c_2 \dot{x}_2(0)$$

Dieses lineare Gleichungssystem für c_1, c_2 hat eine eindeutige Lösung, da nach Voraussetzung die Koeffizientendeterminante $\Delta(0) \neq 0$. Wir stellen fest, dass Anteile $x_1(t), x_2(t)$ in $x(t)$ exponentiell abklingen, so dass bei längerem Wirken von $f(t)$ nur die partikuläre Lösung bleibt („Einschwingvorgang“).

Superpositionsprinzip:

Da die DG *linear* in x ist, gilt:

Sind $\tilde{x}_1(t)$ und $\tilde{x}_2(t)$ Lösungen zu den Inhomogenitäten $f_1(t)$ bzw. $f_2(t)$, also

$$\ddot{\tilde{x}}_i + \rho\dot{\tilde{x}}_i + \omega_0^2 \tilde{x}_i = f_i(t) \quad i = 1, 2$$

dann folgt durch Multiplikation der beiden Gleichungen mit a_1 bzw. a_2 und anschließender Addition, dass

$$\tilde{x}(t) = a_1 \tilde{x}_1(t) + a_2 \tilde{x}_2(t)$$

eine Lösung der DG mit Inhomogenität $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ ist.

Wir wenden uns jetzt der Auffindung einer partikulären Lösung $\tilde{x}(t)$ zu. In Abschnitt 2.5 betrachten wir den einfachsten Fall einer harmonischen äußeren Kraft.

2.5 Harmonische äußere Kraft

Wir betrachten zuerst den Spezialfall $f(t) = f_0 \cos \omega t$, wobei ω die Frequenz der äußeren Kraft sei. Wegen

$$f_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} f_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{2} f_0 e^{-i\omega t}$$

genügt es, als äußere Kraft den Ausdruck $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ zu betrachten, wobei f_0 sogar komplex sein kann. Die gewünschte Lösung ergibt sich dann durch Superposition mit der konjugiert komplexen Lösung ($e^{-i\omega t} = \overline{e^{i\omega t}}$) oder der Lösung mit $\omega \rightarrow -\omega$, bzw. durch Bildung des Realteils, denn $Re(e^{i\omega t}) = \cos \omega t$.

Zur Lösung von

$$\ddot{x} + \rho \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$$

machen wir den Ansatz

$$x(t) = A \cdot f_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{statt } \tilde{x} \text{ wieder } x)$$

Einsetzen und Auflösen nach A liefert

$$A \equiv A(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\rho\omega}$$

$A(\omega)$ ist die *Antwortfunktion* oder *Responsefunktion* des Systems auf eine Kraft $f(t) = e^{i\omega t}$. Mit der früheren Definition von Ω kann man schreiben (schwach gedämpfter Fall)

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i\rho\omega = -(\omega - \Omega - \frac{i}{2}\rho)(\omega + \Omega - \frac{i}{2}\rho) = -(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$$

wobei $\omega_{1,2} = \pm\Omega + \frac{i}{2}\rho$

$$A(\omega) = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{1}{2\Omega} \left(\frac{1}{\omega - \omega_2} - \frac{1}{\omega - \omega_1} \right)$$

Die Antwortfunktion besitzt also Pole in der komplexen Frequenzebene für ω an den Stellen der (komplexen) Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 des ungestörten Oszillators. Diese Pole liegen in der oberen Halbebene, $Im(\omega) > 0$. Wir werden später sehen, dass dies eine allgemeine Eigenschaft von Antwortfunktionen ist.

Die gefundene partikuläre Lösung beschreibt eine ungedämpfte harmonische Schwingung mit der Frequenz ω der äußeren Kraft. Um eine bestimmte Anfangsbedingung zu erfüllen, muss eine entsprechende Kombination von Lösungen der homogenen DG zur partikulären Lösung hinzugefügt werden. Dieser Anteil der Lösung schwingt mit der Frequenz Ω und fällt exponentiell ab (*Einschwingvorgang*).

Reelle harmonische Kraft

Die Lösung der DG mit reeller Kraft $f(t) = f_0 \cos \omega t$ ergibt sich als Superposition

$$x(t) = A(\omega) \frac{f_0}{2} e^{i\omega t} + A(-\omega) \frac{f_0}{2} e^{-i\omega t} = Re\{A(\omega) f_0 e^{i\omega t}\}$$

Mit $A(-\omega) = \overline{A(\omega)}$ und der Zerlegung in Betrag und Phase

$$A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\alpha(\omega)} \quad , \quad \alpha(\omega) \text{ reell}$$

$$|A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \rho^2 \omega^2}} \quad \tan \alpha = \frac{Im(A)}{Re(A)} = \frac{\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ergibt sich

$$x(t) = |A(\omega)| \frac{f_0}{2} \left(e^{i\omega t + i\alpha(\omega)} + e^{-i\omega t - i\alpha(\omega)} \right) = |A(\omega)| \cdot f_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha(\omega))$$

Der Betrag der Amplitude $|A|$ hat bei ω_{max} ein Maximum, das umso höher und schärfer ist, je kleiner die Dämpfung ist.

Die erzwungene Schwingung hat die Frequenz ω der äußeren Kraft und ist gegen diese phasenverschoben um $\alpha(\omega)$. Für $\omega \rightarrow 0$ geht auch $\alpha \rightarrow 0$, d.h. das System folgt der äußeren Kraft ohne Verzögerung. Für $\omega \rightarrow \infty$ ist $\alpha = \pi$, d.h. das System schwingt entgegengesetzt zur äußeren Kraft, da es aufgrund seiner langsamen Eigendynamik (Frequenz Ω) der äußeren Kraft nicht auf der kurzen Zeitskala $\frac{1}{\omega}$ zu folgen vermag. Am Resonanzpunkt des ungedämpften Systems, d.h. bei $\omega = \omega_0$, ist die Phase $\frac{\pi}{2}$.

2.6 Kraftstoß

Als Kraftstoß bezeichnen wir eine Krafteinwirkung, die über einen infinitesimalen Zeitraum mit unendlicher Stärke wirkt. Einen derartigen Verlauf bezeichnet man als *Delta-Funktion* $\delta(t)$.

Def.: Es seien Funktionen $\delta_\epsilon(t)$ definiert durch

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } |t| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{„Kastenfunktion“}$$

Im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ strebt die Folge der Funktionen $\delta_\epsilon(t)$ gegen eine verallgemeinerte Funktion (Distribution), die *Delta-Funktion* heißt.

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$$

Die Bewegungsgleichung im Falle eines Kraftstoßes bei $t = t'$ der Stärke 1 lautet

$$\ddot{x}(t) + \rho \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \delta(t - t')$$

Die Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $x(t'_-) = 0$, $\dot{x}(t'_-) = 0$, wobei $t'_- = \lim_{y \rightarrow 0} (t' - y)$ bezeichnet man als *Green'sche Funktion*

$$G(t; t') := x(t)$$

Mathematischer Einschub: Eigenschaften der Delta-Funktion

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) \quad , \quad \text{symbolisch: } \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

Integrale mit der δ -Funktion:

Für alle $\epsilon > 0$ gilt offenbar

$$\int_{-a}^a dt \delta_\epsilon(t) = 1 \quad , \quad \epsilon < a$$

und damit $\int_{-a}^a dt \delta(t) = 1$, $a > 0$ beliebig

Für jede stetige Funktion $f(t)$ in $[-a, a]$ gilt dann

$$\int_{-a}^a dt f(t) \delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\left(\int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^a \right) f(t) \delta(t) + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt f(t) \delta(t) \right] = 0 + f(0) \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt \delta(t) = f(0)$$

$$\int_a^b dt f(t) \delta(t - t') = \begin{cases} f(t') & \text{für } a < t' < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Deltafunktionen einer Funktion: $\delta(g(t))$

$$\delta(g(t)) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = t_i, \text{ wobei } g(t_i) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int dt \delta(g(t)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_i \int_{g(t_i - \epsilon)}^{g(t_i + \epsilon)} dg \frac{1}{\left(\frac{dg}{dt}\right)} \delta(g) = \sum_i \frac{1}{\left|\frac{dg}{dt}\right|_{t=t_i}}$$

Deltafunktion als Ableitung der Stufenfunktion $\Theta(t)$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \Theta(t)$$

Ende des Einschubs

Da für $t < t'_-$ keine Kraft wirkt, ist dann auch

$$G(t; t') = 0 \quad , \quad t < t'$$

Translationsinvarianz:

G hängt nur von der Zeitdifferenz $t - t'$ ab, nicht von t und t' separat. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass die DG *invariant gegen Zeittranslationen* ist:

Eine Verschiebung des Zeitnullpunkts $t \rightarrow t + \Delta t = \tilde{t}$ fällt sowohl in der äußeren Kraft als auch in den Bewegungstermen heraus, denn

$$\frac{d}{d\tilde{t}} = \frac{d}{d(t + \Delta t)} = \frac{d}{dt}$$

Die transformierte Bewegungsgleichung lautet also

$$\left(\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} + \rho \frac{d}{d\tilde{t}} + \omega_0^2 \right) G(t; t') = \delta(\tilde{t} - \tilde{t}')$$

wobei $G(\tilde{t}; \tilde{t}') = G(t; t') = G(t - t')$

Für $t > t'$ gilt

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) G(t - t') = 0$$

mit der früher abgeleiteten Lösung

$$G(t - t') = e^{-\frac{\rho}{2}(t-t')} [c_1 \cos(\Omega(t - t')) + c_2 \sin(\Omega(t - t'))] \quad , \quad \text{mit } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\rho^2}{4}}$$

Integration der DG über ein infinitesimales Intervall um den Punkt $t = t'$ herum ergibt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \left[\frac{d^2}{dt^2} + \rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] G(t - t') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \delta(t - t')$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{d}{dt} G(t - t') \right]_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(\epsilon) = 1}$$

Dabei wurde benutzt, dass $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(-\epsilon) = 0$ und dass aus der Stetigkeit und Beschränktheit von $G(t)$ für $t \rightarrow 0$ folgt, dass die Terme $\rho \frac{d}{dt}$ und ω_0^2 keinen Beitrag liefern.

Zusammen mit der Anfangsbedingung (Stetigkeit!) $\boxed{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(\epsilon) = 0}$ ergibt sich für die Koeffizienten:

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 = \frac{1}{\Omega}$$

Damit ist

$$\boxed{G(t - t') = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} e^{-\frac{\rho}{2}(t-t')} \sin(\Omega(t - t')) & \text{für } t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}}$$

Die Tatsache, dass $G(t - t') = 0$ für $t < t'$ ist eine Folge der *Kausalität* der physikalischen Vorgänge, die besagt, dass die Wirkung stets nach der Ursache eintritt.

Andererseits erfolgt die Wirkung nicht *instantan*, sondern *retardiert*, d.h. ausgedehnt oder verzögert über eine Zeit, die durch die charakteristischen Zeitskalen des Systems, in diesem Fall die Abklingzeit $\tau = \frac{2}{\rho}$ gegeben ist.

2.7 Nicht-periodische äußere Kraft

Mit Hilfe der Green'schen Funktion und des Superpositionsprinzips lässt sich die Lösung für eine beliebige Kraft $f(t)$ als Integral darstellen.

Die Bewegungsgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) \cdot x(t) = \ddot{x} + \rho \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

lässt sich aus der DG für die Green'sche Funktion gewinnen, indem man mit $f(t')$ multipliziert und integriert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) \cdot G(t-t') &= \delta(t-t') & | \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t') f(t') \right] &= f(t) \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t-t') f(t') = f(t)$$

Durch Vergleich ergibt sich

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t') f(t')$$

Beispiel: $f(t) = e^{i\omega t}$

$$\begin{aligned} \int dt' G(t-t') f(t') &= \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{\rho}{2}(t-t')} \sin \Omega(t-t') e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2i\Omega} \int_{-\infty}^t dt' \left[e^{\lambda_1 t} e^{(i\omega - \lambda_1)t'} - e^{\lambda_2 t} e^{(i\omega - \lambda_2)t'} \right] = A(\omega) \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

mit $A(\omega)$ wie früher berechnet.

2.8 Anharmonischer Oszillator

Als Beispiel für anharmonische Schwingungen betrachten wir die Schwingungsbewegung eines Teilchens der Masse m in einer Potentialmulde $V(x)$

Einmalige Integration der Newton'schen Bewegungsgleichung

$$m\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx}$$

führt zum *Energieerhaltungssatz*

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = E$$

Dieser kann als DG 1. Ordnung aufgefasst werden, die sich mit der Methode der Trennung der Variablen lösen lässt:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \quad , \quad E \geq V(x)$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

Die Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x_0))}$ legen x_0 und E fest.

Die erhaltene Lösung $t = t(x)$ (in Form eines Integrals) ist die Umkehrfunktion der Bahnkurve $x(t)$.

Der qualitative Verlauf der Bewegung lässt sich aus dem Potentialverlauf ablesen. Wir nehmen an, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = \infty$

Für gegebene Energie E liefern die Schnittpunkte der horizontalen Geraden $V(x) = E$ die sogenannten *Umkehrpunkte*, an denen $\dot{x} = 0$ ist und die Bewegungsrichtung sich umkehrt. Dann ist für

(i) $E > V_{max}$ die Bewegung *unbeschränkt (infini)*, d.h. für $t \rightarrow \infty$ geht $x(t) \rightarrow \infty$

(ii) $E < V_{max}$ und $x_0 < x_{max}$, d.h. $x_- < x_0 < x_+$ die Bewegung *beschränkt (finit)*

(iii) $E < V_{max}$ und $x_0 > x_{max}$ die Bewegung unbeschränkt.

Im Falle der beschränkten Bewegung oszilliert das Teilchen zwischen x_- und x_+ und führt eine im Allgemeinen *anharmonische, periodische Bewegung* aus.

Die *Schwingungsdauer* oder *Periodendauer* T ist definiert als die Zeit, die das Teilchen für die Bewegung von x_- nach x_+ und zurück benötigt:

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \quad , \quad \text{wobei } V(x_{\pm}) = E$$

T hängt im Allgemeinen von der Energie E und damit von der *Amplitude* der Schwingungen ab.

Frage: Für welche Form der pot. Energie $V(x)$ wird T unabhängig von E ?

Wir skalieren x mit \sqrt{E} : $\xi = \frac{x}{\sqrt{E}}$

$$T = 2 \cdot \int \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[1 - \frac{1}{E} \cdot V(\xi\sqrt{E}) \right]}}$$

Nur für $V(x) \propto x^2$ kürzt sich E und $V(\xi\sqrt{E}) = \frac{m}{2}\omega_0^2 E \xi^2$, wobei $V(x) = \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2$:

$$T = 2 \cdot \int \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} [1 - \frac{m}{2}\omega_0^2 \xi^2]}} = \frac{2}{\omega_0} \cdot \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad , \quad u = \omega_0 \xi \sqrt{\frac{m}{2}}$$

wie bereits früher für den harmonischen Oszillator abgeleitet.

Für Potentiale $V(x) = a|x|^\alpha$, $\alpha > 0$, lässt sich die Energieabhängigkeit von T herauskalieren:

$$T = A \cdot E^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}}$$

$$\text{wobei } A = \sqrt{2m} \cdot a^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-|u|^\alpha}}$$

Für Potentiale steiler (flacher) als das harmonische Potential, $\alpha > 2$ ($\alpha < 2$), nimmt T mit wachsender Energie ab (zu).

2.9 Parametrische Resonanz¹

Wenn die Parameter eines schwingungsfähigen Systems, d.h. die Eigenfrequenz oder die Dämpfungskonstante eines Oszillators sich in einer bestimmten Weise zeitlich verändern, kann es zu Resonanzerscheinungen kommen.

Beispiel: Fadenpendel, dessen Aufhängepunkt in vertikaler Richtung oszilliert:

Koordinaten des Massenpunkts m :

$$x(t) = l \cdot \sin \varphi$$

$$y(t) = -l \cdot \cos \varphi - a \cos \nu t$$

a = Amplitude des Aufhängepunkts

ν = Schwingungsfrequenz des Aufhängepunkts

Bewegungsgleichungen:

$$(1) \quad m\ddot{x} = ml [-\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ddot{\varphi} \cos \varphi] = 0$$

$$(2) \quad m\ddot{y} = -ml [-\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \ddot{\varphi} \sin \varphi] + mav^2 \cos \nu t = -mg \quad (\text{Schwerkraft})$$

$$\text{Aus (1): } \dot{\varphi}^2 = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \ddot{\varphi}$$

$$\text{in (2) eingesetzt: } ml \frac{1}{\sin \varphi} \ddot{\varphi} + mav^2 \cos \nu t = -mg$$

¹Dieser Abschnitt ist als Ergänzung zur Vorlesung gedacht.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2(t) \sin \varphi = 0 \\ &\text{wobei } \omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \nu t) \\ &\text{und } \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad , \quad h = \frac{a \nu^2}{l \omega_0^2} \end{aligned}$$

Wir beschränken uns auf kleine Schwingungsamplituden, so dass $\sin \varphi \approx \varphi$ und $\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2(t)\varphi = 0}$

Aus der Periodizität von $\omega(t)$,

$$\omega(t) = \omega(t + T) \quad , \quad \text{mit } T = \frac{2\pi}{\nu}$$

folgt, dass mit $\varphi(t)$ auch $\varphi(t + T)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung ist. Wenn $\tilde{\varphi}_1(t)$ und $\tilde{\varphi}_2(t)$ zwei linear unabhängige Lösungen sind, so muss gelten

$$\tilde{\varphi}_{1,2}(t + T) = c_{1,2}\tilde{\varphi}_1(t) + d_{1,2}\tilde{\varphi}_2(t)$$

Durch geeignete Linearkombination von $\tilde{\varphi}_1(t)$ und $\tilde{\varphi}_2(t)$

$$\varphi_1(t) = a_1\tilde{\varphi}_1(t) + b_1\tilde{\varphi}_2(t)$$

lässt sich erreichen, dass

$$\varphi_1(t + T) = \mu_1\varphi_1(t) \quad \quad \varphi_2(t + T) = \mu_2\varphi_2(t)$$

Die allgemeinste Lösung dieser Gleichungen ist

$$\varphi_1(t) = \mu_1^{\frac{t}{T}} \pi_1(t) \quad \quad \varphi_2(t) = \mu_2^{\frac{t}{T}} \pi_2(t)$$

wobei $\pi_{1,2}(t) = \pi_{1,2}(t + T)$ periodische Funktionen sind.

Beweis: Für jedes t gilt $t = nT + [t]$ mit $0 \leq [t] < T$

$$\varphi_1(t) = \mu_1^n \varphi_1([t])$$

Mit der Definition von π

$$\varphi_1([t]) = \mu_1^{[t]} \pi([t])$$

$$\text{folgt dann } \varphi_1(t) = \mu_1^{\frac{t}{T}} \pi([t])$$

Wegen $[t] = [t + nT]$ ist $\pi([t])$ periodisch.

Wir zeigen nun, dass μ_1 und μ_2 voneinander abhängen:

Aus

$$\begin{aligned} \text{I: } &\ddot{\varphi}_1 + \omega^2(t)\varphi_1 = 0 && | \cdot \varphi_2 \\ \text{II: } &\ddot{\varphi}_2 + \omega^2(t)\varphi_2 = 0 && | \cdot \varphi_1 \\ \text{I-II: } &\ddot{\varphi}_1\varphi_2 - \ddot{\varphi}_2\varphi_1 = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}_1\varphi_2 - \dot{\varphi}_2\varphi_1) = 0 \end{aligned}$$

folgt $\dot{\varphi}_1\varphi_2 - \dot{\varphi}_2\varphi_1 = \text{const.}$

Bei Änderung von $t \rightarrow t + T$:

$$(\dot{\varphi}_1\varphi_2 - \dot{\varphi}_2\varphi_1)(t + T) = \mu_1\mu_2(\dot{\varphi}_1\varphi_2 - \dot{\varphi}_2\varphi_1)(t)$$

Damit ist $\boxed{\mu_1\mu_2 = 1}$

Aus der Forderung, dass mit $\varphi(t)$ auch $\overline{\varphi(t)}$ Lösung ist, folgt, dass

entweder $\varphi_1(t) = \overline{\varphi_2(t)}$, d.h. $\mu_1 = \overline{\mu_2}$ und damit wegen $\mu_1 = \frac{1}{\mu_2}$

$$\mu_2\overline{\mu_2} = 1 \quad , \quad \text{ebenso} \quad \mu_1\overline{\mu_1} = 1$$

d.h. $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$

oder $\varphi_1(t) = \overline{\varphi_1(t)}$, d.h. $\mu_1 = \overline{\mu_1}$, $\mu_2 = \overline{\mu_2}$ und damit

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu_2} = \mu \quad \text{wobei} \quad |\mu| > 1 \quad , \quad \text{o.B.d.A.}$$

$$\text{d.h.} \quad \varphi_1(t) = \mu^{\frac{t}{T}} \pi_1(t) \quad , \quad \varphi_2(t) = \mu^{-\frac{t}{T}} \pi_2(t)$$

Wegen $\mu^{\frac{t}{T}} = e^{\frac{t}{T} \ln \mu}$ steigt damit $\varphi_1(t)$ *exponentiell* an. Eine beliebig kleine Auslenkung des Systems aus der Ruhelage ($\varphi = 0$) schaukelt sich aufgrund der Oszillation von $\omega(t)$ schnell auf: **parametrische Resonanz.**

Wir betrachten nun die näherungsweise Lösung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega_0^2[1 + h \cos \nu t]\varphi(t) = 0$$

für den Fall $h \ll 1$.

Wir suchen eine Lösung in der Form

$$\varphi(t) = a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t$$

wobei $a(t)$ und $b(t)$ langsam veränderliche Funktionen sind,

$$\dot{a} \ll \omega_0 a \quad , \quad \dot{b} \ll \omega_0 b$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt einen Term der Form

$$\omega_0^2 h \cos \nu t [a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t]$$

der sich mit dem Additionstheorem umschreiben lässt

$$\cos \nu t \cos \omega t = \frac{1}{2} [\cos(\nu - \omega)t + \cos(\nu + \omega)t]$$

$$\cos \nu t \sin \omega t = \frac{1}{2}[-\sin(\nu - \omega)t + \sin(\nu + \omega)t]$$

Wir vernachlässigen die mit der Frequenz $(\nu + \omega)$ und damit schnell oszillierenden Terme (die sich zeitlich wegmitteln während einer Periode der langsamen Schwingung).
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= -\omega^2[a \cos \omega t + b \sin \omega t] + 2\omega[-\ddot{a} \sin \omega t + \ddot{b} \cos \omega t] + \ddot{a} \cos \omega t + \ddot{b} \sin \omega t \\ &= -\omega_0^2[a \cos \omega t + b \sin \omega t] - \omega_0^2 h \frac{1}{2}[a \cos(\nu - \omega)t - b \sin(\nu - \omega)t]\end{aligned}$$

wobei die Terme mit \ddot{a} und \ddot{b} zu vernachlässigen sind.

Diese Gleichung hat eine Lösung für $\omega = \frac{\nu}{2}$ und wenn die Koeffizienten der $\cos \frac{\nu}{2}t$ und $\sin \frac{\nu}{2}t$ -Terme beide Null sind:

$$\begin{aligned}-\omega^2 a + 2\omega \dot{b} + \omega_0^2 a + \frac{1}{2}\omega_0^2 h a &= 0 \\ -\omega^2 b - 2\omega \dot{a} + \omega_0^2 b - \frac{1}{2}\omega_0^2 h b &= 0\end{aligned}$$

$$\text{Ansatz: } a(t) = a_0 e^{st} \quad , \quad b(t) = b_0 e^{st}$$

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 h)a_0 + 2\omega s b_0 &= 0 \\ -2\omega s a_0 + (\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 h)b_0 &= 0\end{aligned}$$

Lösungsbedingung: Koeffizientendeterminante = 0

$$s^2 = \frac{1}{4\omega^2}[-(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{1}{4}\omega_0^4 h^2]$$

Damit s reell ist, und die Schwingungsamplituden $a(t)$ und $b(t)$ exponentiell anwachsen, muss gelten ($\omega = \frac{\nu}{2}$):

$$|\omega_0^2 - \frac{\nu^2}{4}| < \frac{1}{2}\omega_0^2 h$$

d.h. je näher die Frequenz ν an der doppelten Oszillatorfrequenz $2\omega_0$ liegt, umso kleiner muss die Amplitude h der Frequenzmodulation $\omega(t)$ sein, um Resonanz hervorzurufen.

In Resonanz, also für $\nu = 2\omega_0$ ist $s = \frac{\omega_0}{2}h$ und damit

$$\varphi(t) = e^{\beta t}[a_0 \cos \omega_0 t + b_0 \sin \omega_0 t]$$

mit $\beta = \frac{\omega_0}{2}h$.

Der Zusammenhang mit der allgemeinen Lösung

$$\varphi(t) = \mu^{\frac{t}{T}} \pi(t)$$

ergibt sich als:

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{\pi}{\omega_0} \quad , \quad \mu = e^{\frac{\pi h}{2}}$$
$$\pi(t) = a_0 \cos \omega_0 t + b_0 \sin \omega_0 t$$

Bei Anwesenheit schwacher Reibung ist

$$\ddot{\varphi} + \rho \dot{\varphi} + \omega_0^2 (1 + h \cos \nu t) \varphi = 0$$

und die parametrische Resonanzlösung erhält eine Dämpfung:

$$\varphi(t) = e^{(\beta-\gamma)t} [a_0 \cos \omega_0 t + b_0 \sin \omega_0 t]$$

wobei $\gamma = \frac{\rho}{2}$ wie früher berechnet.

Damit ein exponentielles Anwachsen auftritt, muss also $\beta > \gamma$ und damit

$$h > 2 \frac{\gamma}{\omega_0}$$

sein.

Kapitel 3

Systeme von Massenpunkten

Wir erweitern jetzt die betrachtete Mechanik *eines* Massenpunktes auf *Systeme von Massenpunkten* mit Massen m_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Es sei \vec{r}_i der Ortsvektor des Massenpunktes m_i . Die Bewegungsgleichung dafür lautet:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

wobei die auf den i-ten Massenpunkt einwirkende Kraft \vec{F}_i zerlegt wurde in den Anteil der „äußeren Kraft“ \vec{F}_i^a , die ihre Ursache nicht innerhalb des Systems hat, und \vec{F}_{ij} , die vom j-ten Massenpunkt auf den i-ten Massenpunkt ausgeübte Wechselwirkungskraft. Dafür gilt nach dem 3. Newton'schen Axiom:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Die Bewegungsgleichungen zusammen mit der Anfangsbedingung $\{\vec{r}_i(t_0), \dot{\vec{r}}_i(t_0)\}$ legen den Zustand des Systems zu jedem späteren Zeitpunkt, d.h. die Koordinaten und Geschwindigkeiten, eindeutig fest. Die N gekoppelten Differentialgleichungen für die \vec{r}_i lassen sich nicht allgemein lösen. Für den Fall des Zweikörperproblems werden wir die Lösung später behandeln.

In dieser Situation sind allgemeingültige Aussagen sehr wertvoll, wie sie von *Erhaltungssätzen* für bestimmte Größen gemacht werden. Wir werden deshalb zumindest die Erhaltung des *Impulses*, des *Drehimpulses* und der *Energie* betrachten.

3.1 Impuls, Schwerpunkt, Impulserhaltung

Wir definieren den Gesamtimpuls \vec{P} des Systems

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i$$

Die zeitliche Änderung von \vec{P} ist gegeben durch ($m_i = \text{const.}$).

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^a + \sum_{i,j(i \neq j)} \vec{F}_{ij}$$

wegen $\sum_{i,j(i \neq j)} \vec{F}_{ij} = \sum_{i < j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0$

$$\text{folgt } \frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}^a \quad ; \quad \vec{F}^a = \sum_i \vec{F}_i^a$$

Der Gesamtimpuls ändert sich also nur unter der Wirkung der gesamten äußeren Kraft \vec{F}^a . Wenn keine äußeren Kräfte vorhanden sind (isoliertes System), oder wenn die Summe der äußeren Kräfte sich zu Null addiert, gilt der

$$\text{Impulserhaltungssatz} \quad \frac{d}{dt} \vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_0 = \text{const.}$$

Wir definieren den *Schwerpunkt* mit dem Ortsvektor \vec{R} durch

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_i m_i \text{ Gesamtmasse}$$

$$\text{Es ist } M \dot{\vec{R}} = \sum_i \dot{\vec{h}}_i = \vec{P}$$

Wenn Impulserhaltung gilt, folgt für den Schwerpunkt

$$\dot{\vec{R}} = \vec{v}_0 = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0$$

d.h. der Schwerpunkt bewegt sich dann mit konstanter Geschwindigkeit, also geradlinig und gleichförmig. Im allgemeinen Fall gilt für die Schwerpunktbewegung die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^a$$

Ergänzung: Eine genauere Betrachtung der Natur der Wechselwirkungen zeigt, dass sie durch Felder übertragen werden (z.B. elektromagn. Feld). Diese Felder können Impuls aufnehmen und müssen im Prinzip in die Impulsbilanz einbezogen werden.

3.2 Drehimpuls, Drehimpulserhaltung

Wir gehen aus von dem System der Bewegungsgleichungen und multiplizieren die i-te Gleichung vektoriell mit \vec{r}_i :

$$m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{h}}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^a + \sum_{i,j(i \neq j)} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Unter Benutzung von $\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \dot{\vec{h}}_i) = \vec{r}_i \times \ddot{\vec{h}}_i$ lässt sich diese Gleichung als Bewegungsgleichung für den *Drehimpuls* des i-ten Teilchens

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{h}}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad ; \quad \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{h}}_i$$

schreiben:

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_i = \vec{D}_i^a + \vec{D}_i^w$$

wobei das äußere Drehmoment als

$$\vec{D}_i^a = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^a$$

und das innere Drehmoment als

$$\vec{D}_i^w = \vec{r}_i \times \sum_{i,j(i \neq j)} \vec{F}_{ij}$$

definiert wurde.

Der Drehimpuls kann in Analogie zum Impuls, das Drehmoment in Analogie zur Kraft gesehen werden. Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ erfüllt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{D}^a + \vec{D}^w$$

wobei die Gesamt-Drehmomente definiert werden als

$$\vec{D}^a = \sum_i \vec{D}_i^a \quad ; \quad \vec{D}^w = \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

Im 2. Zusatz zu den Newton'schen Axiomen wurde gefordert, dass Kräfte zwischen zwei Teilchen entlang der Verbindungsgeraden gerichtet sein sollen: $\vec{F}_{ij} \propto (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ Damit ist

$$\vec{D}^w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{D}^a$$

Wenn $\vec{D}^a = 0$, d.h. wenn das System isoliert ist oder die Summe der Drehmomente sich zu Null addiert, gilt der

$$\text{Drehimpulserhaltungssatz} \quad \frac{d}{dt} \vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_0 = \text{const.}$$

Drehimpuls und Drehmoment sind *axiale Vektoren*:

Bei einer Inversion des Koordinatensystems $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ bleibt ihre Richtung erhalten. Dagegen sind *polare Vektoren* solche, die bei Inversion ihre Richtung umkehren ($\vec{r}, \vec{p}, \vec{F}$).

Mathematischer Einschub: Vektorprodukt

Neben dem Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} lässt sich ein **Vektorprodukt** definieren als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

Für die Komponenten von $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ gilt

$$c_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

wobei der total antisymmetrische Einheitstensor dritter Stufe („ ϵ -Tensor“) definiert ist durch

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \text{ oder zyklisch vertauscht} \\ -1 & \text{wenn } \{i, j, k\} = \{2, 1, 3\} \text{ oder zyklisch vertauscht} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zyklische Vertauschung eines n-Tupels ist definiert als

$$\{i, j, k\} \rightarrow \{k, i, j\} \rightarrow \{j, k, i\}$$

Ausgeschrieben in den einzelnen Komponenten gilt

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

Aus der Eigenschaft des ϵ -Tensors

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \quad \text{und zyklisch (Antisymmetrie)}$$

folgt, dass \vec{c} senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} steht:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

Beweis:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \sum_i a_i c_i = \sum_{ijk} a_i \epsilon_{ijk} a_j b_k = \sum_{ijk} a_j \epsilon_{jik} a_i b_k = - \sum_{ijk} a_i \epsilon_{ijk} a_j b_k = -\vec{a} \cdot \vec{c}$$

Die Länge des Vektors \vec{c} ist gegeben durch

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \Theta|$$

wobei Θ der zwischen \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ist. Zum Beweis verwenden wir eine Identität der ϵ -Tensoren:

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ipq} = \delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{c}^2 &= \sum_i c_i^2 = \sum_i \sum_{jk} \sum_{pq} \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{ipq} a_p b_q \\ &= \sum_{jk} \sum_{pq} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) a_j b_k a_p b_q \\ &= \sum_{jk} (a_j^2 b_k^2 - (a_j b_j)(a_k b_k)) \\ &= \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \Theta) \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \Theta \end{aligned}$$

$|\vec{c}|$ ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das von \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird:

$$\text{Fläche: } F = a \cdot b \cdot \sin \theta$$

Das Spatprodukt aus 3 Vektoren $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ ist definiert als

$$(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}) = \vec{f} \cdot (\vec{g} \times \vec{h}) = \sum_{ijk} f_i \epsilon_{ijk} g_j h_k$$

Eigenschaften:

- zyklische Invarianz

$$(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}) = (\vec{h}, \vec{f}, \vec{g}) = (\vec{g}, \vec{h}, \vec{f})$$

$$\text{aber } (\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}) = -(\vec{g}, \vec{f}, \vec{h})$$

- das Spatprodukt gibt das Volumen an, das von einem Parallelepiped (Spat) mit Kanten $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ eingeschlossen wird

$$(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}) = |\vec{f}| \cdot |\vec{g} \times \vec{h}| \cdot \cos \alpha = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$$

denn $|\vec{g} \times \vec{h}|$ ist die Grundfläche, $|\vec{f}| \cdot \cos \alpha$ die Höhe des Parallelepipeds

- Vektoridentitäten:

$$\vec{p} \times (\vec{q} \times \vec{s}) = \vec{q}(\vec{p} \cdot \vec{s}) - \vec{s}(\vec{p} \cdot \vec{q})$$

$$(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r} \times \vec{s}) = (\vec{p} \cdot \vec{r})(\vec{q} \cdot \vec{s}) - (\vec{p} \cdot \vec{s})(\vec{q} \cdot \vec{r})$$

$$(\vec{p} \times \vec{q}) \times (\vec{r} \times \vec{s}) = \vec{q} \cdot (\vec{p}, \vec{r}, \vec{s}) - \vec{p} \cdot (\vec{q}, \vec{r}, \vec{s})$$

Ende des Einschubs

3.3 Energie, Energieerhaltungssatz

Wir betrachten zunächst ein Teilchen der Masse m unter dem Einfluss einer beliebigen Kraft $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Multiplikation mit $\dot{\vec{r}}$ und Umformung $\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}^2$ ergibt

$$\frac{dT}{dt} - \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

wobei $T = \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}})^2$ die kinetische Energie des Massenpunkts ist.

Die Größe

$$L = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

heißt die *Leistung*, die bei der Beschleunigung des Massenpunkts aufgebracht werden muss. Integration über die Zeit t zwischen t_1 und t_2 ergibt

$$T_2 - T_1 - \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$$

Die kinetischen Energien $T_{1,2} = \frac{m}{2}(\vec{v}_{1,2})^2$ hängen nicht explizit von der Zeit ab, sondern nur vom Wert der Geschwindigkeiten, d.h. dem *mechanischen Zustand* des Systems bei t_1 und t_2 . Der mechanische Zustand zu jedem Zeitpunkt ist durch die Angabe des Orts und der Geschwindigkeit des Massenpunkts $\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\}$ eindeutig gegeben. Die kinetische Energie ist damit eine Zustandsfunktion $T = T(\dot{\vec{r}}(t))$.

Dagegen hängt die Größe

$$A_{21} = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

als die *Arbeit*, die zwischen t_1 und t_2 an dem Massenpunkt geleistet wurde, vom gesamten Bahnverlauf $\vec{r}(t)$ und möglicherweise auch noch explizit von den Zeiten t_1 und t_2 ab. Die Arbeit ist im allgemeinen keine Zustandsfunktion.

Falls jedoch die Kraft \vec{F} nicht explizit von der Zeit abhängt, und ebenfalls nicht von der Geschwindigkeit abhängt, also $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(t))$, gilt

$$A_{21} = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

wobei das Linienintegral entlang der Bahnkurve eingeführt wurde.

A_{21} ist dann eine *Zustandsfunktion*, wenn gilt, dass für festen Anfangspunkt \vec{r}_0 das Linienintegral nur vom Endpunkt \vec{r} abhängt, also eine Funktion $V(\vec{r})$ eindeutig definiert werden kann durch

$$V(\vec{r}) = - \int_{C_{01}} d\vec{r}' \vec{F}(\vec{r}') = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r}' \vec{F}(\vec{r}')$$

wobei C_{01} einen beliebigen Weg von \vec{r}_0 nach \vec{r}_1 beschreibt. $V(\vec{r})$ heißt *Potential* oder *potentielle Energie*. Mit $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ gilt dann für einen Weg entlang der Koordinatenachsen, $(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x, y_0, z_0) \rightarrow (x, y, z_0) \rightarrow (x, y, z)$:

$$V(\vec{r}) = - \left(\int_{x_0}^x dx' F_x(x', y_0, z_0) + \int_{y_0}^y dy' F_y(x, y', z_0) + \int_{z_0}^z dz' F_z(x, y, z') \right)$$

Mathematischer Einschub: Vektoranalysis

Vektor-Differentialoperator „Nabla“: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Gradient einer skalaren Funktion $V(x, y, z)$:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}V = \text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Rotation einer Vektorfunktion $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{F} = \text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right)_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$$

Integralsatz von Stokes

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_A d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}))$$

Dabei ist C eine geschlossene Kurve (*Linienintegral*) und A eine von C eingeschlossene (offene) Fläche.
Beispiel: C sei ein Quadrat in der x-y-Ebene

Flächenelement $d\vec{f} = dx dy \vec{e}_z$

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_0^a dx (F_1(x, 0) - F_1(x, a)) + \int_0^a dx (F_2(a, y) - F_2(0, y))$$

$$\int_A d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})) = \int_0^a dx \int_0^a dy (\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = \int dx \int dy \left(\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right)$$

$$= \int_0^a dy (F_2(a, y) - F_2(0, y)) - \int_0^a dx (F_1(x, a) - F_1(x, 0))$$

wobei $\int_0^a dx \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) = F_2(a, y) - F_2(0, y)$, etc., benutzt wurde.

Damit ist $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_A d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}))$ bewiesen.

Allgemeiner Fall:

Zerlegung von C und A in infinitesimale Quadrate. Die Beiträge von inneren Linien heben sich auf:

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = \sum_i \oint_{C_i} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \sum_i \int_A d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \int_A d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

C_i = Umrandung des Quadrats i

A_i = Fläche des Quadrats i $\sum_i A_i = A = \text{Gesamtfläche}$

Ende des Einschubs

Die Kraft \vec{F} ergibt sich dann durch Bildung des *Gradienten*:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}}V(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Bedingung für die Existenz der Funktion $V(\vec{r})$ ist, dass das Linienintegral über \vec{F} für jeden geschlossenen Weg Null ist.

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0, \text{ für alle Wege C.}$$

Diese Bedingung lässt sich als lokale Beziehung formulieren:

Mit Hilfe des *Integralsatzes von Stokes*

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_A d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}))$$

wobei A eine offene Fläche ist, die von der Kurve C berandet wird und $d\vec{f}$ ein Vektor senkrecht zum Flächenelement $df = |d\vec{f}|$ ist, dessen Orientierung mit dem Umlaufsinn von C eine rechtshändige Schraube bildet.

Die Größe

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{F}$$

heißt „*Rotation von F*“.

Für die Existenz einer Potentialfunktion ist notwendig, dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

d.h. \vec{F} *rotationsfrei* ist.

Derartige Kraftfelder heißen **konservativ**.

Für konservative Kraftfelder gilt also:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}) = \vec{\nabla}V \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

und damit ist

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) - \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} T - \frac{d}{dt} V = 0$$

$$\Rightarrow T + V = E = \text{const.}$$

Die *Gesamtenergie* E des Systems, die die Summe der kinetischen Energie $T(\dot{\vec{r}})$ und der potentiellen Energie $V(\vec{r})$ ist, ist dann eine *Erhaltungsgröße*.

Nicht konservative Kraft: Reibung

Reibungskräfte sind der Bewegung eines Körpers entgegengesetzt gerichtet. Sie entstehen durch Kontakt des Körpers mit anderen Körpern oder Medien und beschreiben die Übertragung von Energie, Impuls, etc. von dem betrachteten Körper auf die Umgebung. Bei kleinen Geschwindigkeiten sind sie proportional zur Geschwindigkeit:

$$\vec{F}_{\text{Reibung}} = \vec{F}_R = -R\dot{\vec{r}}$$

wobei $R > 0$ der Reibungskoeffizient ist. Die entlang eines geschlossenen Wegs geleistete Arbeit ist hier

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}_R = -R \oint_C d\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = -R \int_{t_1}^{t_2} dt v^2(t) < 0$$

also *negativ definit*, d.h. das System gibt immer Energie an die Umgebung ab (hier ist t_1 die Anfangszeit, t_2 die Endzeit einer geschlossenen Bahnkurve).

Lösung der Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = -R\dot{\vec{r}} \quad \text{ergibt} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}_0 e^{-\beta t} \quad \beta = \frac{R}{m}$$

$$\text{und } \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{\beta} \vec{v}_0 (1 - e^{-\beta t})$$

Für die Energie des Systems (in diesem Fall nur kinetische Energie) gilt

$$\frac{d}{dt} T = -R v^2 = -v_0^2 R e^{-2\beta t} < 0$$

T nimmt also monoton ab.

Energie eines Systems mit N Massenpunkten

Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung für das Teilchen i skalar mit $\dot{\vec{r}}_i$ und summieren über i :

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^a + \sum_{ij(i \neq j)} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij}$$

Die linke Seite lässt sich als totale Zeitableitung schreiben:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \equiv \frac{dT}{dt}$$

wobei die *kinetische Energie* T des gesamten Systems definiert wurde:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

Die rechte Seite lässt sich unter Zusatzannahmen ebenfalls als totale Zeitableitung schreiben. Für die äußeren Kräfte machen wir die Annahme, dass sie nicht explizit von der Zeit und nicht von den Geschwindigkeiten der Teilchen abhängen sollen:

$$\vec{F}_i^a = \vec{F}_i^a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$$

Außerdem sollen diese Kräfte *konservativ* sein, d.h. aus einem Potential abgeleitet werden können:

$$\vec{F}_i^a = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} V^a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

Dann ist

$$\sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^a = -\sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial V^a}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{dV^a}{dt}$$

Der Beitrag der inneren Kräfte lässt sich unter der *weiteren* Annahme, dass sie Kräfte \vec{F}_{ij} nur vom Abstand $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ abhängen,

$$\vec{F}_{ij} = f_{ij}(r_{ij}) \cdot \hat{r}_{ij} \quad \hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}}$$

ebenfalls als totale Zeitableitung schreiben. Dazu folgern wir zunächst aus dem 3. Newton'schen Axiom

$$f_{ij}(r) = f_{ji}(r)$$

Wir definieren die potentielle Energie des Teilchenpaares i,j als

$$V_{ij}(r) = -\int_{r_0}^r dr' f_{ij}(r') \quad (r_0 > 0 \text{ und fest})$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_{ij}} V_{ij}(r_{ij}) = \left(\frac{d}{dr_{ij}} V_{ij}(r_{ij}) \right) \frac{\partial r_{ij}}{\partial \vec{r}_{ij}} = -f_{ij}(r_{ij}) \cdot \hat{r}_{ij} = -\vec{F}_{ij}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\dot{\vec{r}}_i \vec{F}_{ij} + \dot{\vec{r}}_j \vec{F}_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j \right) \cdot \vec{F}_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{\vec{r}}_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_{ij}} V_{ij}(r_{ij}) = -\frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

wobei die potentielle Energie V der inneren Wechselwirkungen definiert wurde als

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij(i \neq j)} V_{ij}(r_{ij})$$

Damit ergibt sich der

$$\text{Energieerhaltungssatz} \quad \frac{d}{dt} (T + V^a + V) = 0$$

der die Erhaltung der Gesamtenergie E des Systems ausdrückt.

$$T + V^a + V = \text{const.}$$

Im Vergleich zum Impuls und Drehimpuls besteht der Unterschied, dass:

- die inneren Kräfte zur Energiebilanz beitragen
- Energieerhaltung auch bei Vorhandensein äußerer Kräfte gilt, wenn diese konservativ sind.

Wir demonstrieren noch, dass aus dem Potential V die inneren Kräfte (wie früher für ein Teilchen gezeigt) durch Bildung des Gradienten abgeleitet werden können:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} V &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} V_{jk}(r_{jk}) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \left(\delta_{ij} \frac{dV_{ik}(r_{ik})}{dr_{ik}} \frac{\partial r_{ik}}{\partial \vec{r}_i} + \delta_{ik} \frac{dV_{ji}(r_{ji})}{dr_{ji}} \frac{\partial r_{ji}}{\partial \vec{r}_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k f_{ik}(r_{ik}) \hat{r}_{ik} - \frac{1}{2} \sum_j f_{ji}(r_{ji}) \hat{r}_{ji} \\ &= \sum_j \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

Kapitel 4

Das Zweikörperproblem

Als einfachstes System von Massenpunkten betrachten wir in diesem Kapitel zwei Massenpunkte, die miteinander in Wechselwirkung stehen. Beispiele sind die Gravitation zwischen Himmelskörpern, die elektrische Anziehung oder Abstoßung zwischen zwei geladenen Teilchen, ein klassisches Modell zweier Atome im Molekül, oder auch elastomechanische Kräfte zwischen zwei zusammenstoßenden Körpern.

Die Positionen und die Massen der beiden Teilchen seien \vec{r}_1, \vec{r}_2 und m_1, m_2 . Die Kraft \vec{F}_{12} , die Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausübt, sei durch ein Potential $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ gegeben.

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} V \quad \text{und} \quad \vec{F}_{21} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} V$$

4.1 Impulserhaltung. Schwerpunkts- und Relativbewegung

Wenn wir annehmen, dass die Teilchen sich nicht in einem äußeren Kraftfeld befinden, sondern im homogenen Raum, dann ist kein Bezugspunkt ausgezeichnet. In diesem Fall ist das System *invariant unter räumlichen Translationen*, d.h. es muss gelten:

$$V(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}) = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad \text{für beliebiges } \vec{a}$$

Damit kann V nicht von \vec{r}_1 und \vec{r}_2 separat abhängen, sondern nur von der Differenz $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

$$V = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Es folgt, in Übereinstimmung mit dem 3. Newton'schen Axiom:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{F}_{21}$$

Es gilt dann Impulserhaltung:

$$\vec{P} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = M \cdot \dot{\vec{R}} = M \vec{v}_s = \text{const.}$$

wobei \vec{R} der Schwerpunktsort, M die Gesamtmasse und \vec{P} der Gesamtimpuls ist.

$$\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \quad M = m_1 + m_2$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v}_s . Es ist vorteilhaft, diesen „trivialen“ Teil der Bewegung abzuspalten. Dazu führen wir die Relativkoordinaten

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

zusammen mit \vec{R} ein.

Die Teilchenorte lassen sich damit durch \vec{R} und \vec{r} ausdrücken:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} & \dot{\vec{r}}_1 &= \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r} & \dot{\vec{r}}_2 &= \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}}\end{aligned}$$

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{12} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{1}{m_2} \vec{F}_{12}\end{aligned}$$

lassen sich durch Linearkombination in die oben betrachtete Gleichung für die Schwerpunktskoordinate (Summe) und die folgende Gleichung für die Relativkoordinate (gewichtete Differenz) transformieren:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}$$

die unter Berücksichtigung von $\vec{F}_{12} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} V(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ die Form

$$m \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

einer DGL nur für die Variable \vec{r} annimmt. Dabei ist m die „reduzierte Masse“:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Leftrightarrow m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Das Zweikörperproblem ist damit zurückgeführt auf die Bewegung *eines* Körpers in einem Potential $V(\vec{r})$.

Im Folgenden werden wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt setzen. Damit ist $\dot{\vec{R}} = 0$ und $\ddot{\vec{R}} = 0$.

4.2 Drehimpulserhaltung. Ebene Bahnkurven und Flächensatz

In Abwesenheit äußerer Kräfte ist der Raum, in dem Massenpunkte sich bewegen, völlig strukturlos. Dies bedeutet, dass neben der Invarianz gegen räumliche Translationen auch *Invarianz gegen beliebige Drehungen* gefordert werden muss. Als Konsequenz ergibt sich ein weiterer Erhaltungssatz, der für den

Drehimpuls. Diese Forderung bedeutet, dass es keine ausgezeichneten (oder vorgegebenen) Richtungen geben darf. Das Potential $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ kann demzufolge nur vom Abstand zwischen den Teilchen abhängen:

$$V = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Es folgt, dass die Kräfte entlang der Verbindungsgeraden zwischen den beiden Massenpunkten gerichtet sind:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{dV(r)}{dr} \cdot \frac{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{\partial \vec{r}_1} = -\frac{dV(r)}{dr} \hat{r}_{12}$$

wobei $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$, wie im Zusatz zu den Newton'schen Axiomen gefordert.

Wie früher gezeigt, ist dann der Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = m_1(\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2)$$

erhalten.

Im Schwerpunktsystem mit $\vec{R} = \dot{\vec{R}} = 0$ und $\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r}$, $\vec{r}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{r}$ ergibt sich:

$$\vec{L} = \left[m_1 \left(\frac{m_2}{M} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{M} \right)^2 \right] (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \frac{m_1 m_2}{M} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \text{const.}$$

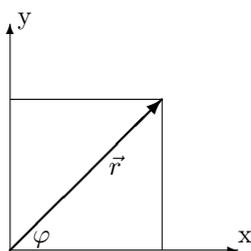
Aus der Eigenschaft des Vektorprodukts folgt

$$\vec{L} \cdot \vec{r} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{L} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

d.h. Ortsvektor und Geschwindigkeitsvektor sind zu allen Zeiten senkrecht auf dem konstanten Vektor \vec{L} .

Damit ist die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ auf eine Ebene senkrecht zu \vec{L} beschränkt.

Der konstante Betrag des Drehimpulses $|\vec{L}| = \ell$ hat Konsequenzen für den zeitlichen Ablauf der Bewegung. Um diese herauszuarbeiten, ist es günstig, Polarkoordinaten einzuführen:



$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad r = |\vec{r}|$$

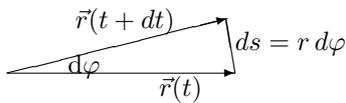
Mit Hilfe von

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

wobei eine Orientierung der z-Achse entlang \vec{L} angenommen wurde, ergibt sich für die Drehimpulskomponente L_z

$$L_z = m \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right)_z = m(xy\dot{y} - yx\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi} = \ell = \text{const.}$$

Die Bewegung erfolgt also so, dass $r^2\dot{\varphi}$ zeitlich konstant bleibt. Diese Bedingung hat eine einfache geometrische Interpretation: Wir betrachten den „Fahrstrahl“, d.h. den Vektor \vec{r} zu zwei mit Zeitintervall dt aufeinanderfolgenden Zeiten.



Die vom Vektor \vec{r} im Zeitintervall dt überstrichene Fläche dF ist gegeben durch

$$dF = \frac{1}{2} r ds = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

oder

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{\ell}{2m} = \text{const.}$$

Diese Aussage ist Inhalt des *Flächensatzes*, der auch als *2. Kepler'sches Gesetz* für die Planetenbewegung bekannt ist:

„Der Radiusvektor $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.“

4.3 Energiesatz und Bahnkurven

Der Energiesatz für die Relativbewegung hat die Form

$$\frac{m}{2} (\dot{\vec{r}})^2 + V(r) = E = \text{const.}$$

In Polarkoordinaten erhält man für die kinetische Energie

$$\frac{m}{2} (\dot{\vec{r}})^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ kann mit Hilfe des Erhaltungssatzes für den Drehimpuls zugunsten von r eliminiert werden:

$$r\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr}$$

Damit nimmt der Energiesatz die Form einer gewöhnlichen DG 1. Ordnung für $r(t)$ an.

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

Dies ist der Energiesatz für ein Teilchen der Masse m in *einer räumlichen Dimension*, das sich in einem *effektiven Potential*

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} \quad \text{bewegt}$$

Der Potentialanteil

$$V_{\text{Zf}}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

heißt Zentrifugalpotential und beschreibt die Wirkung der Zentrifugalkraft, die bei Vorhandensein eines Drehimpulses $l > 0$ das Teilchen vom Zentrum ($r = 0$) abhält. Die Abstoßung ($V_{\text{Zf}} > 0!$) divergiert für $r \rightarrow 0$ wie $\frac{1}{r^2}$ und dominiert die Wirkung des Potentials $V(r)$ für kleine r .

Die Lösung lässt sich wie früher behandelt als Integral über r darstellen. Dazu lösen wir den Energiesatz nach $\dot{r}(t)$ auf

$$\dot{r}(t) = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}$$

und integrieren diese DG durch Separation der Variablen:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r dr' \left[\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r')) \right]^{\frac{1}{2}}$$

wobei $r_0 = r(t_0)$. Durch Umkehrung von $t(r)$ ergibt sich $r(t)$.

Die Winkelvariable $\varphi(t)$ lässt sich aus dem Flächensatz gewinnen:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t dt' \frac{\ell}{mr^2(t')}$$

Die Bahnkurve $r(\varphi)$ erhält man aus der Integralbeziehung für $\varphi - \varphi_0$, wenn man die Integration über t in eine über r transformiert, mittels $dt = \frac{dr}{\dot{r}}$:

$$\varphi(r) - \varphi_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{r'^2} [E - V_{\text{eff}}(r')]^{\frac{1}{2}}$$

4.4 Qualitative Diskussion der Bahnkurven

Wie früher im Fall der eindimensionalen Bewegung eines Massenpunktes im Potential $V(x)$ diskutiert, lässt sich der Bewegungsablauf aus dem Schnitt der Potentialkurve $V_{\text{eff}}(r)$ mit der Linie gegebener Energie und den Anfangsbedingungen ablesen.

Im Falle eines anziehenden Potentials, das für $r \rightarrow \infty$ verschwindet, hat $V_{\text{eff}}(r)$ den Verlauf

Finite Bewegung: Für $E > 0$ ist die Bewegung auf den Bereich $r_{\min} < r < r_{\max}$ beschränkt, wobei $V_{\text{eff}}(r_{\min, \max}) = E$

Dann dominiert die Anziehung durch das Potential $V(r)$ bei größeren Abständen, während bei kleineren Abständen die „Zentrifugalbarriere“ für endlichen Drehimpuls ℓ verhindert, dass das Teilchen zu nahe an das Zentrum kommt.

Der Verlauf von $r(t)$ ist periodisch, wobei eine Periode gegeben ist durch einen „Umlauf“, z.B. vom Umkehrpunkt r_{\min} nach r_{\max} und zurück nach r_{\min} : $r(t + T_0) = r(t)$.

Die räumliche Bewegung in der $r - \varphi$ -Ebene ist aber *nur in Ausnahmefällen periodisch*, denn dafür ist notwendig, dass der Winkel $\Delta\varphi$, der während einer Periode der $r(t)$ -Bewegung zurückgelegt wird,

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr' \frac{1}{r'^2} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r')}}$$

ein rationaler Bruchteil von 2π ist.

Nur falls

$$\Delta\varphi = \frac{m}{n} 2\pi \quad m, n \text{ ganz}$$

schließt sich die Bahn nach n Umläufen um das Zentrum, da dann die gesamte Winkeländerung

$$(\Delta\varphi)_n = n\Delta\varphi = 2\pi m \quad \text{ist}$$

und damit die Bahn (mit der korrekten Tangente) zum Ausgangspunkt zurück kommt.

Im Allgemeinen ist $\Delta\varphi = p \cdot 2\pi$, p irrational. Die typische Form der Bahnkurve ist dann *rosettenförmig*.

Bemerkung: In diesem Fall überdeckt die Bahnkurve im Laufe der Zeit die gesamte Fläche zwischen r_{\min} und r_{\max} . Man spricht von *chaotischer* Bewegung.

Infinite Bewegung: Für $E > 0$ läuft das Teilchen z.B. aus großem Abstand auf das Potentialzentrum zu, bis es am Umkehrpunkt $r = r_{\min}$ eine Umkehr der Radialgeschwindigkeit von $\dot{r} < 0$ nach $\dot{r} > 0$ erfährt und sich daraufhin vom Zentrum wegbewegt.

In großer Entfernung vom Zentrum, wenn $V_{\text{eff}} \simeq 0$, ist die Bahn des Teilchens geradlinig.

Das Teilchen erfährt also durch die Wechselwirkung mit dem Zentrum eine Änderung seiner Bewegungsrichtung:

Man spricht von Streuung um den Winkel Θ .

Der Streuwinkel Θ ergibt sich als

$$\pi \pm \Theta = 2\Delta\varphi(r_{\min}; r = \infty) = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} dr' \frac{\ell}{r'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r'))}}$$

$+\Theta$ für anziehendes, $-\Theta$ für abstoßendes Potential.

Dabei wurde benutzt, dass die Bahnkurve symmetrisch ist bezüglich Spiegelung an der Geraden g , die das Zentrum Z mit dem Punkt kleinsten Abstands r_{\min} verbindet. Diese Gerade bildet den Winkel $\Delta\varphi(r_{\min}; r = \infty) = \frac{1}{2}(\pi \pm \Theta)$ mit der negativen x -Achse (Einfallrichtung des Teilchens).

Die Symmetrie der Bahnkurve ergibt sich auch aus der fundamentalen Symmetrie der Bewegungsgleichungen (falls Dämpfungsterme vernachlässigt sind) unter *Zeitumkehr* $t \rightarrow -t$. Danach verläuft die Bewegung symmetrisch bzgl. Zeitspiegelung.

4.5 Gravitation. Keplerproblem

Die allgemeinen Ergebnisse der letzten Abschnitte lassen sich unmittelbar auf ein System von zwei Himmelskörpern anwenden, die über die Gravitation miteinander wechselwirken. Beispiele dafür sind die Bewegung der Erde (oder anderer Planeten) um die Sonne, des Mondes um die Erde, Kometenbewegungen, Doppelsternsysteme, jeweils in der Näherung, in der der Einfluss weiterer Körper vernachlässigt werden kann.

Die Gravitationswechselwirkung hat die Form

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Das zugehörige Potential ist anziehend

$$V(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Wir können also bei hinreichend kleiner Energie mit beschränkten Bahnkurven rechnen, d.h. ein Planet wird an die Sonne gebunden.

Im Beispiel Sonne-Erde (m_1 =Erdmasse, m_2 =Sonnenmasse) folgt aus $m_1 \ll m_2$, dass $\vec{r}_2 \simeq 0$ und $\vec{r}_1 \simeq \vec{r}$. Das effektive Potential besitzt für $\ell > 0$ ein Minimum bei r_m :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(r) &= -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} & k &= \gamma m_1 m_2 \\ \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} &= \frac{k}{r^2} - \frac{\ell^2}{mr^3} = 0 \\ \Rightarrow r_m &= \frac{\ell^2}{mk} & V_{\text{eff}}(r_m) &= -\frac{mk^2}{2\ell^2} \end{aligned}$$

Damit die Bewegung überhaupt möglich ist, d.h. die kinetische Energie $T > 0$ ist, muss $E > V_{\text{eff}}(r_m)$ sein.

Für Energien in dem Bereich $V_{\text{eff}}(r_m) < E < 0$ verläuft die radiale Bewegung in dem Bereich $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, wobei $r_{\min, \max}$ die Nullstellen von $[E - V_{\text{eff}}(r)]$ sind.

Für positive Energien $E > 0$ ist die Bewegung infinit; falls der Körper sich auf das Zentrum zubewegt, erreicht er einen Mindestabstand und entfernt sich anschließend nach unendlich (z.B. Meteoriten).

Um die Bahnkurve $r(\varphi)$ zu bestimmen, ist $V_{\text{eff}}(r)$ in den allgemeinen Ausdruck einzusetzen:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{r'^2} \left[\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mk}{\ell^2 r'} - \frac{1}{r'^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Hier bietet sich die Substitution $r' = \frac{1}{\xi}$ mit $dr' = -\frac{1}{\xi^2} d\xi$ an:

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = - \int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} d\xi \left[\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mk}{\ell^2} \xi - \xi^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Quadratische Ergänzung führt auf

$$\begin{aligned} \frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mk}{\ell^2} \xi - \xi^2 &= D \left[1 - \left(\frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{D}} \right)^2 \right] & \xi_0 &= \frac{mk}{\ell^2} \\ D &= \frac{2m}{\ell^2} \left(E + \frac{mk^2}{2\ell^2} \right) > 0 \end{aligned}$$

Mit $\cos \Theta = \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{D}}$, $-\sin \Theta d\Theta = \frac{d\xi}{\sqrt{D}}$, ergibt sich

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = - \int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} d\xi \frac{1}{\sqrt{D}} \left[1 - \left(\frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{D}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = - \int_{\Theta(r_0)}^{\Theta(r)} d\Theta \frac{-\sin \Theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \Theta}} = \Theta(r) - \Theta(r_0)$$

Die Integrationsgrenzen sind $\Theta(r) = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \xi_0}{\sqrt{D}}$

Damit ist

$$\varphi(r) = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \xi_0}{\sqrt{D}}$$

und durch Umkehrung erhält man

$$\frac{1}{r} = \xi_0 + \sqrt{D} \cos \varphi = \frac{mk}{\ell^2} (1 + \epsilon \cos \varphi)$$

wobei

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

Für später halten wir fest, dass für $k < 0$ gilt: $\frac{1}{r} = \frac{m|k|}{\ell^2} (-1 + \epsilon \cos \varphi)$.

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten, wobei der Ursprung in einem der Brennpunkte liegt und die x-Achse ($\varphi = 0$) durch den Punkt kleinsten Abstands geht.

Mathematischer Einschub: Kegelschnitte

Die Ellipse

ist der geometrische Ort aller Punkte mit

$$d_1 + d_2 = 2a$$

$$\text{Brennweite } f = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\text{Exzentrizität } \epsilon = \frac{f}{a} < 1$$

$$\text{Bahnkurve } \boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$$

$$\text{Parameter } p = \frac{b^2}{a}$$

Die Hyperbel

$$|d_1 - d_2| = 2a$$

$$f = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\epsilon = \frac{f}{a} > 1$$

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Polardarstellung (Koordinatenursprung im Brennpunkt)

$$x = x' + f = r \cos \varphi + f$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$d_1 = \sqrt{(2f + r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi}, \quad d_2 = r$$

$$d_1 + d_2 = 2a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos \varphi}$$

$$d_1 = \sqrt{(2f - r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi}, \quad d_2 = r$$

Ende des Einschubs

Die Gleichung

$$(*) \quad r = \frac{\ell^2}{mk} \cdot \frac{1}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

beschreibt für $\epsilon > 1$, d.h. $E > 0$, eine *Hyperbel*,

für $\epsilon = 1$, d.h. $E = 0$, eine *Parabel*

und für $0 < \epsilon < 1$, d.h. $-\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0$ eine *Ellipse*, d.h. eine beschränkte Bahnkurve.

Die Normalform z.B. der Ellipse ($\epsilon < 1$) erhält man aus (*) durch Multiplikation mit $(1 + \epsilon \cos \varphi)$, woraus $r = c - \epsilon r \cos \varphi$ folgt und dem Quadrat davon:

$$r^2 = x^2 + y^2 = c^2 + \epsilon^2 x^2 - 2\epsilon c x, \text{ mit } c = \frac{\ell^2}{mk}.$$

Quadratische Ergänzung:

$$\frac{1}{a^2}(x - x_0)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a = \frac{c}{1 - \epsilon^2} \quad ; \quad b^2 = \frac{c^2}{1 - \epsilon^2}$$

und Brennweite $f = \sqrt{a^2 - b^2} = \epsilon a = x_0 \quad ; \quad \frac{f}{a} = \epsilon$ Exzentrizität.

Anschaulich ergeben sich die Halbachsen der Ellipse wie folgt:

$$\varphi = 0 : \quad r = r_{\min} = \frac{\ell^2}{mk(1+\epsilon)} = a - f$$

$$\varphi = \pi : \quad r = r_{\max} = \frac{\ell^2}{mk(1-\epsilon)} = a + f$$

$$\text{Gro\ss e Halbachse: } a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{\ell^2}{mk(1-\epsilon^2)}$$

Aus der Definition von ϵ folgt:

$$1 - \epsilon^2 = -\frac{2E\ell^2}{mk^2} = \frac{2|E|\ell^2}{mk^2}$$

und damit

$$a = \frac{k}{2|E|} = \frac{\gamma m_1 m_2}{2|E|} \quad \text{unabh\u00e4ngig von } \ell!$$

$$\text{Brennweite } f: \quad f = \frac{1}{2}(r_{\max} - r_{\min}) = \frac{\epsilon\ell^2}{mk(1-\epsilon^2)} = \epsilon a$$

$$\text{Kleine Halbachse } b: \quad b = \sqrt{a^2 - f^2} = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{\ell}{\sqrt{2m|E|}} \quad \text{unabh\u00e4ngig von } \gamma!$$

Grenzf\u00e4lle:

$\ell = 0$: Ohne Drehimpuls ist $b=0$ und der K\u00f6rper st\u00fcrzt ins Zentrum

$E \rightarrow 0^-$: $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$ *Parabel*

$E \rightarrow V(r_m)$: $\epsilon = 0$ *Kreisbahn*

Die Umlaufzeit T l\u00e4sst sich aus dem Fl\u00e4chensatz bestimmen, $\dot{F} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{\ell}{2m}$. W\u00e4hrend eines vollst\u00e4ndigen Umlaufs in der Zeit T wird die Ellipsenfl\u00e4che πab \u00fcberstrichen, also

$$\pi ab = \frac{\ell}{2m} T$$

$$T = \frac{2\pi mab}{\ell} = 2\pi \frac{ma^2}{\ell} \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

oder, mit Hilfe von $1 - \epsilon^2 = \frac{\ell^2}{mka}$,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} a^{\frac{3}{2}}$$

Einsetzen von m und k ergibt schlie\u00dflich

$$T = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma(m_1 + m_2)}}$$

und damit

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1 + m_2)} \quad \text{unabhängig von } E \text{ und } \ell!$$

Die gefundenen Ergebnisse für die Bahnkurve und den zeitlichen Verlauf der Bewegung wurden von *Johannes Kepler* empirisch gefunden (veröffentlicht 1618 in dem Hauptwerk „*Harmonice Mundi*“) und in drei Gesetzen für die Planetenbewegung zusammengefasst:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit der Sonne in einem Brennpunkt ($m_2 \gg m_1$ verwendet!)
2. Der „Fahrstrahl“ von der Sonne zu dem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten sind proportional zu den Kuben der großen Halbachsen.

Vergleich mit astronomischen Beobachtungen:

Die Planetenbahnen werden durch die Keplergesetze sehr genau beschrieben. Kleine Abweichungen, z.B. die Periheldrehung, ergeben sich durch

1. Gravitationskräfte der Planeten untereinander
2. Endliche Ausdehnung der Planeten und Sonne (Quadrupolmoment der Sonne)
3. Relativistische Effekte (allgemeine Relativitätstheorie)

Weiterer Erhaltungssatz für $\frac{1}{r}$ -Potential: Lenz-Vektor

Im Gegensatz zu der in der qualitativen Diskussion der Bewegung für beliebiges Potential $V(r)$ gemachten Feststellung, dass die Bahnkurven i.A. nicht geschlossen, d.h. nicht periodisch sind, fanden wir für das $\frac{1}{r}$ -Potential geschlossene Bahnkurven. Dies ist die Konsequenz eines weiteren Erhaltungssatzes, der besagt, dass es nur *einen* Punkt minimalen Abstandes vom Potentialzentrum gibt, der in Richtung des sogenannten *Lenz-Vektors* $\vec{\epsilon}$ liegt:

$$\vec{\epsilon} = \frac{1}{k} \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{\epsilon}$ ist eine Erhaltungsgröße:

$$\frac{d\vec{\epsilon}}{dt} = \frac{1}{k} \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} - \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})}{r^3} \right) \quad \text{mit } \dot{\vec{L}} = 0 \quad (\text{Drehimpulserhaltung!})$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\epsilon}}{dt} = -\frac{1}{mr^3} (\vec{r} \times \vec{L}) - \frac{1}{mr^3} (\vec{L} \times \vec{r}) = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

wobei $\vec{L} \times \vec{r} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} = m[\dot{\vec{r}} \cdot r^2 - \vec{r}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})]$ benutzt wurde.

Da $\vec{\epsilon}$ zeitunabhängig ist, kann $\vec{\epsilon}$ für einen beliebigen Punkt der Bahnkurve, z.B. das Perihel, berechnet werden:

Mit $\vec{r} = \hat{x} \frac{\ell^2}{mk(1+\epsilon)}$
 und $\dot{\vec{r}} = \hat{y} r \dot{\varphi} = \hat{y} r \frac{\ell}{mr^2}$
 ist

$$\vec{\epsilon} = \hat{x} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{\ell^2}{mr^2} - 1 \right) = \hat{x} \epsilon$$

Der Vektor $\vec{\epsilon}$ zeigt vom Zentrum (Ursprung) in Richtung Perihel. Das Perihel liegt somit fest. Der Betrag von $\vec{\epsilon}$ ist durch die Exzentrizität gegeben.

4.6 Coulomb-Potential

Die Ergebnisse des letzten Abschnitts lassen sich sofort übertragen auf ein System von zwei elektrisch geladenen Massenpunkten m_1, m_2 , die über die Coulombkraft wechselwirken. Seien $Z_1 e$ und $Z_2 e$ die Ladungen der beiden Teilchen (e =Elementarladung, Z_1, Z_2 ganze Zahlen ungleich Null), dann ist das Potential $V(r)$ gegeben durch

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad \text{Coulombpotential}$$

Für $Z_1, Z_2 < 0$ ist das Zweikörperproblem identisch zum Keplerproblem, mit $k = -Z_1 Z_2 e^2$. Es gibt also je nach Energie und Drehimpuls des Systems den Fall geschlossener Ellipsenbahnen und den Fall offener Hyperbelbahnen (oder Parabelbahnen).

Für den Fall gleichartiger Ladungen, $Z_1 Z_2 > 0$, stoßen sich die beiden Teilchen ab. Der im letzten Abschnitt definierte Parameter k ist dann negativ. Das effektive Potential ist rein repulsiv ($V_{\text{eff}}(r) \geq 0$) und damit existieren nur Lösungen mit Energie $E > 0$, die infiniten Charakter haben und durch Hyperbelbahnen gegeben sind.

Die oben abgeleitete Gleichung für die Bahnkurven im Fall $\epsilon > 1$ ist dann explizit gegeben durch $p = \frac{\ell^2}{m|k|}$.

$$\frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit} \quad a = \frac{p}{\epsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$

$$\text{oder } a = \frac{|k|}{2E}, \quad b = \frac{\ell}{\sqrt{2mE}}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

$$\text{Linker Zweig: } r = \frac{p}{-1 + \epsilon \cos \varphi}$$

$$\text{Asymptoten: } r \rightarrow \infty, \quad \varphi_{\pm} = \pm \arccos \frac{1}{\epsilon}$$

Kapitel 5

Streuung von Teilchen

Zwei Teilchen mit positiver Energie im Schwerpunktssystem durchlaufen eine unbeschränkte Bewegung. Falls das Wechselwirkungspotential $V(r)$ zwischen den beiden Teilchen für $r \rightarrow \infty$ hinreichend schnell verschwindet, erfahren die Teilchen, wenn sie zunächst aufeinander zulaufen, aufgrund der Wechselwirkung eine Ablenkung, d.h. sie erleiden eine *Streuung*. Stärke und Art der Streuung hängen vom Wechselwirkungspotential ab. Eine Messung der Ablenkung der Teilchen kann deshalb Aufschluss über das Wechselwirkungspotential $V(r)$ geben.

Dieser Zusammenhang kann benutzt werden, um aus dem Ergebnis vieler Streuprozesse zwischen Streuteilchen und streuendem Objekt („target“) die Form und Anordnung von Teilchen im Objekt abzuleiten.

5.1 Wirkungsquerschnitt

Wir betrachten folgende Versuchsanordnung: Ein Strahl von einfallenden Teilchen gleicher Art und Geschwindigkeit treffe auf ein Streuobjekt und werde dadurch abgelenkt. Je nach Nähe zum Streuzentrum ist die Ablenkung verschieden.

Die gestreuten Teilchen werden mittels eines Detektors nachgewiesen, der die Zahl der Teilchen $\dot{N}(\Omega)$ pro *Raumwinkelement* $d\Omega$ und pro Zeit misst.

Bezogen auf die Zahl der einfallenden Teilchen pro Zeit und Fläche, die *Stromdichte* j , ergibt sich der *differentielle Wirkungsquerschnitt* $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\dot{N}(\Omega)}{j}$$

Mit der Zahl der in der Zeit Δt in Richtung des Raumwinkels Ω in den Detektor gestreuten Teilchen $\Delta N(\Omega)$, bei gegebener Öffnungsfläche dF und Abstand R des Detektors ist

$$\dot{N}(\Omega) = \frac{\Delta N(\Omega)}{d\Omega \cdot \Delta t}$$

wobei das Raumwinkelement $d\Omega$ definiert wurde als

$$d\Omega = \frac{dF}{R^2} = (d \cos \Theta) \cdot d\phi = \sin \Theta \cdot d\Theta \cdot d\phi$$

Θ und ϕ sind Polarwinkel und Azimutwinkel eines Kugelkoordinatensystems mit Ursprung im Streuzentrum und z-Achse entlang der Einfallrichtung.

Der *totale Wirkungsquerschnitt* ist definiert als das Integral des differentiellen Wirkungsquerschnitts über alle Raumwinkel:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\Theta \cdot \sin \Theta \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Theta, \phi)$$

Die Dimension von σ und von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist die einer Fläche („Querschnitt“), nämlich der Fläche, in der der Teilchenstrom effektiv gestreut wird. Größenordnung des Streuquerschnitts für die Streuung

zweier Atome: $\sigma \simeq 10 \text{ \AA}^2 = 10^{-15} \text{ cm}^2$

eines Nukleons an einem Atomkern: $\sigma \simeq \pi R_{\text{Kern}}^2 \simeq 10^{-24} \text{ cm}^2 \equiv 1 \text{ barn}$

zweier Lichtteilchen: $\sigma \approx 10^{-32} \text{ cm}^2$

Bemerkung: Bei Streuexperimenten mit atomaren oder subatomaren Teilchen wird in der Regel an einem Objekt wie etwa einem Kristall, einer dünnen Folie oder einer Flüssigkeit gestreut, das sehr viele *identische* Streuzentren enthält. Wenn möglich sollen die einfallenden Teilchen nur höchstens einmal gestreut werden, bevor sie das Objekt wieder verlassen. Die durch die nicht genau bekannte Position des jeweiligen Streuzentrums (z.B. Atoms) sowie durch die endliche Abmessung des Detektors verursachte Winkelunschärfe kann durch einen hinreichend großen Abstand R klein gehalten werden.

Für kugelsymmetrisches Streuzentrum hängt der Wirkungsquerschnitt nur vom Winkel Θ ab:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Theta)$$

Berechnung des Wirkungsquerschnitts

Zur Berechnung von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ betrachten wir ein herausgegriffenes Projektilteilchen und ein Streuzentrum (Targetteilchen) und summieren am Ende über alle Teilchen. Dabei werden die Projektilteilchen als untereinander nicht wechselwirkend angenommen.

Wir beschränken uns auf den Fall eines kugelsymmetrischen Potentials (Zentralpotential); der Drehimpuls \vec{L} bezüglich des Streuzentrums ist dann erhalten und die Bewegung des Teilchens verläuft in einer Ebene ($\perp \vec{L}$), die die Achse des Streuproblems enthält und ist unabhängig von ϕ .

$$\Rightarrow V = V(r) \quad , \quad \Theta = |\pi - 2\Delta\varphi|$$

Für ein Teilchen der Energie E hängt dann der Streuwinkel Θ nur vom anfänglichen Abstand des Teilchens von der Strahlachse, dem Stoßparameter s ab: $\Theta = \Theta(s)$. Dieser hängt mit dem *Drehimpuls* ℓ bezüglich des Streuzentrums zusammen:

$$\ell = |\vec{r} \times \vec{p}| = s \cdot m \cdot v_{\infty} = s\sqrt{2mE}$$

wobei benutzt wurde, dass die Geschwindigkeit des Teilchens in großer Entfernung vom Streuzentrum v_∞ , wenn das Streupotential vernachlässigt werden kann, durch $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$ gegeben ist.

Wegen des eindeutigen Zusammenhangs von Stoßparameter s und Streuwinkel Θ tragen nur Teilchen mit $s = s(\Theta)$ zum Wirkungsquerschnitt beim Streuwinkel Θ bei. Quantitativ ergibt sich der Zusammenhang über die Erhaltung des Teilchenstroms.

I_{in} = Einfallender Strom = $j \cdot 2\pi s |ds|$, wobei $2\pi s |ds|$ das Flächenelement mit gegebenem s ist.

$$I_{out} = \text{Strom der gestreuten Teilchen} = \left| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\Theta}^{\Theta+d\Theta} d\Theta' \sin \Theta' j \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| = j \cdot 2\pi \sin \Theta \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| d\Theta$$

$I_{in} = I_{out}$ ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s(\Theta)}{\sin \Theta} \left| \frac{ds(\Theta)}{d\Theta} \right| = \left| \frac{d(\pi s^2)}{2\pi d \cos \Theta} \right|$$

Der Streuwinkel Θ wurde weiter oben als Funktion von E und ℓ berechnet.

$$\Theta(s) = |\pi - 2\Delta\varphi(r_{min}; r = \infty)|$$

$$\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{\infty} dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E - V_{eff}(r))}} \quad , \quad V_{eff}(r) = V + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$$\Delta\varphi(s) = \int_{r_{min}}^{\infty} dr \frac{s}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt σ lässt sich als Integral über den Stoßparameter ausdrücken:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int d\Theta \sin \Theta \frac{s(\Theta)}{\sin \Theta} \left| \frac{ds(\Theta)}{d\Theta} \right| \\ &= 2\pi \int_{s(\pi)}^{s(0)} ds s \end{aligned}$$

Beispiel: Streuung an einer harten Kugel mit Radius R

Für $s \rightarrow 0$ geht $\Theta \rightarrow \pi$

für $s \rightarrow R$ geht $\Theta \rightarrow 0$

$$\sigma = 2\pi \int_0^R ds s = \pi R^2$$

Der Wirkungsquerschnitt ist gleich dem geometrischen Querschnitt.

5.2 Rutherford-Streuung

In den Jahren 1912-13 führte Rutherford eine Reihe von Streuexperimenten durch, in denen er α -Teilchen, also Atomkerne des Heliums (genauer ${}^4\text{He}$) auf dünne Metallfolien (z.B. Gold) schoss. Die gestreuten Teilchen wurden z.T. sehr stark gestreut (Rückwärtsstreuung). Dieses Ergebnis benutzte Bohr, um sein Atommodell eines fast punktförmigen Kerns im Zentrum einer ausgedehnten Elektronenwolke zu rechtfertigen. Die Streuung der α -Teilchen erfolgte dabei in erster Linie über die Coulomb-Wechselwirkung mit den Atomkernen des targets, die ein Potential

$$V(r) = -\frac{k}{r} = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} \quad \text{mit } k < 0$$

für die α -Teilchen bilden. Dabei ist $z_1 = 2$ die Kernladungszahl von Helium und z_2 die der Metallatome in der Folie (z.B. $z_2 = 79$ für Au).

Wie früher bereits abgeleitet, sind die Bahnkurven im abstoßenden $\frac{1}{r}$ -Potential Hyperbeln:

$$\frac{p}{r} = -1 + \epsilon \cos \varphi$$

wobei $p = \frac{\ell^2}{m|k|}$ und $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{k}\right)^2} > 1$

Der minimale Abstand vom Zentrum, r_{min} , wird für $\varphi = 0$ erreicht:

$$\frac{p}{r_{min}} = \epsilon - 1$$

Der für $r \rightarrow \infty$ erreichte Grenzwinkel ist

$$\cos(\Delta\varphi) = \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{k}\right)^2}} \quad \rightarrow \quad \tan(\Delta\varphi) = \frac{2Es}{|k|}$$

und damit gilt für den Streuwinkel Θ (abstoßendes Potential):

$$\Theta = \pi - 2\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \tan(\Delta\varphi) = \tan \frac{\pi - \Theta}{2} = \cot \frac{\Theta}{2}$$

$$\text{woraus} \quad s = \frac{|k|}{2E} \cdot \cot \frac{\Theta}{2} \quad \text{folgt.}$$

Eingesetzt in $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\sin \Theta} \left(\frac{ds}{d\Theta} \right) = \left(\frac{k}{2E} \right)^2 \frac{\cot \frac{\Theta}{2}}{\sin \Theta} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$

wobei benutzt wurde, dass

$$\frac{d}{d\Theta} \cot \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$

Mit Hilfe von $\sin \Theta = 2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}$ ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{4E} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \quad \text{Rutherford}$$

An diesem Ergebnis sind mehrere Eigenschaften bemerkenswert:

1. $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist eine monoton abnehmende Funktion von Θ , die für $\Theta \rightarrow 0$ stark divergiert ($\propto \Theta^{-4}$). Der Grenzfall $\Theta \rightarrow 0$ entspricht Stoßparameter $s \rightarrow \infty$, d.h. Trajektorien, die in unendlicher Entfernung vom Zentrum verlaufen. Die Tatsache, dass Teilchen sogar in großer Entfernung vom Zentrum noch abgelenkt werden, ist auf die Langreichweitigkeit des Coulomb-Potentials zurückzuführen. In realen physikalischen Systemen wird die Coulombwechselwirkung des Kerns durch die negativen Ladungen der umgebenden Elektronen abgeschirmt, so dass gilt:

$$V(r) = V_S(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} e^{-\frac{r}{r_0}}$$

wobei r_0 die sog. *Abschirmlänge* von der Größenordnung eines Atomdurchmessers ist. Dann ist $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ im Limes $\Theta \rightarrow 0$ endlich.

2. Für $\Theta = \pi$, d.h. Rückwärtsstreuung ($s \rightarrow 0$), ist $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ immer noch relativ groß. Rutherfords Beobachtung von Rückwärtsstreuung im Einklang mit obigem Ergebnis führte zu dem Schluss, dass die Kernladung auf einen kleinen Raumbereich konzentriert sein musste.

3. Die Rutherford-Formel, die oben klassisch abgeleitet wurde, stimmt mit dem Ergebnis einer voll quantenmechanischen Behandlung, wie sie für Atomkerne erforderlich ist, überein.

4. Die endliche Ausdehnung R_0 des Atomkerns führt zu einer Verkleinerung von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ nahe bei $\Theta = \pi$.

5.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt im Laborsystem

Die bisher durchgeführte Berechnung des diff. Wirkungsquerschnitts bezog sich auf das Schwerpunktssystem (SS) von Projektil und Streuobjekt. Im Streuexperiment wird die Messung jedoch im Laborsystem (LS) durchgeführt, in dem das Streuobjekt vor der Streuung in Ruhe ist: $\vec{r}'_2 = 0$ (Wir bezeichnen Größen im Laborsystem mit einem Strich). Wenn \vec{r}'_1 der Ort des Projektils im LS ist, bewegt sich der Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\vec{R}}'(t) = \frac{m_1}{M} \cdot \dot{\vec{r}}'_1(t = -\infty) = \text{const.}$$

Für die Ortsvektoren $\vec{r}'_i(t)$ der beiden Teilchen im SS gilt

$$\vec{r}'_i(t) = \vec{R}'(t) + \vec{r}_i(t) \quad , \quad i = 1, 2$$

$$\text{mit } \vec{R}'(t) = \dot{\vec{R}}'(t) \cdot t$$

Aus $\vec{r}'_2(-\infty) = 0$ folgt

$$\dot{\vec{R}}' = -\dot{\vec{r}}'_2(-\infty) = \frac{m_1}{M} \cdot \dot{\vec{r}}(-\infty)$$

wobei benutzt wurde, dass im SS $\vec{r}_2(t) = -\frac{m_1}{M}\vec{r}(t)$.

Für die Streuwinkel Θ' und Θ ergibt sich aus $\dot{\vec{r}}_1'(\infty) = \dot{\vec{R}}' + \dot{\vec{r}}_1(\infty)$ und mit $\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{r}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} v_1'(\infty) \cdot \cos \Theta' &= v_1(\infty) \cdot \cos \Theta + |\dot{\vec{R}}'| = \left(\frac{m_2}{M} \cos \Theta + \frac{m_1}{M} \right) \dot{r}(\infty) \\ v_1'(\infty) \cdot \sin \Theta' &= v_1(\infty) \cdot \sin \Theta = \frac{m_2}{M} \sin \Theta \cdot \dot{r}(\infty) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\tan \Theta' = \frac{\sin \Theta'}{\cos \Theta'} = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

Im Grenzfall $m_1 \ll m_2$ gilt also $\Theta' \simeq \Theta$, weil das Streuobjekt nach erfolgter Streuung näherungsweise in Ruhe bleibt.

Der Zusammenhang zwischen den differentiellen Wirkungsquerschnitten $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ im SS und $\frac{d\sigma'}{d\Omega'}$ im LS ergibt sich durch Gleichsetzen der Anzahl der gestreuten Teilchen in die Raumwinkelbereiche $[\Theta, \Theta + d\Theta]$ bzw. $[\Theta', \Theta' + d\Theta']$:

$$j \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot 2\pi \sin \Theta \, d\Theta = j' \cdot \frac{d\sigma'}{d\Omega'} \cdot 2\pi \sin \Theta' \, d\Theta'$$

Die Stromdichten der einlaufenden Projektilstrahlen j und j' sind gegeben durch

$$j' = \frac{\Delta N}{\Delta V} v_1'(-\infty) = \frac{\Delta N}{\Delta V} \dot{r}(-\infty) = j$$

da die Teilchendichte $\frac{\Delta N}{\Delta V}$ im SS und LS gleich ist und $v_1'(-\infty) = \dot{r}(-\infty)$ (Relativgeschwindigkeit vor dem Streuprozess) ist.

Damit gilt also:

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta'} \frac{d\Theta}{d\Theta'} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d \cos \Theta}{d \cos \Theta'}$$

Für den Spezialfall $m_1 = m_2$ ergibt sich:

$$\tan \Theta' = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + 1} = \tan \frac{\Theta}{2} \quad \rightarrow \quad \Theta' = \frac{\Theta}{2}$$

und damit

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = 4 \cos \Theta' \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \text{mit } \Theta = 2\Theta'$$

wobei $\frac{d\Theta}{d\Theta'} = 2$ und $\frac{\sin \Theta}{\sin \Theta'} = \frac{\sin 2\Theta'}{\sin \Theta'} = 2 \cos \Theta'$ benutzt wurde.

Für den Rutherford'schen Wirkungsquerschnitt für die Streuung zweier Teilchen gleicher Masse erhält man damit im Laborsystem:

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \Theta'}{\sin^4 \Theta'} \quad , \quad m_1 = m_2$$

$$E_1 = \frac{m_1}{2} v_1'^2(-\infty) = 2E = 2 \left(\frac{m}{2} \dot{r}^2(-\infty) \right)$$

ist dabei die Energie eines einlaufenden Teilchens im Laborsystem, wobei $m = \frac{m_1}{2}$ für die reduzierte Masse zu setzen ist.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung: Was ist theoretische Physik?	1
1	Newton'sche Mechanik	3
1.1	Grundbegriffe und Mathematische Hilfsmittel	3
1.2	Die Newton'schen Axiome	6
1.3	Gravitation	8
2	Harmonischer Oszillator	11
2.1	Beispiele für den harmonischen Oszillator	11
2.2	Freier, ungedämpfter harmonischer Oszillator	14
2.3	Gedämpfter harmonischer Oszillator	19
2.4	Erzwungene Schwingungen	21
2.5	Harmonische äußere Kraft	21
2.6	Kraftstoß	23
2.7	Nicht-periodische äußere Kraft	26
2.8	Anharmonischer Oszillator	27
3	Systeme von Massenpunkten	34
3.1	Impuls, Schwerpunkt, Impulserhaltung	34
3.2	Drehimpuls, Drehimpulserhaltung	35
3.3	Energie, Energieerhaltungssatz	39
4	Das Zweikörperproblem	46
4.1	Impulserhaltung. Schwerpunkts- und Relativbewegung	46
4.2	Drehimpulserhaltung. Ebene Bahnkurven und Flächensatz	47
4.3	Energiesatz und Bahnkurven	49
4.4	Qualitative Diskussion der Bahnkurven	50
4.5	Gravitation. Keplerproblem	52
4.6	Coulomb-Potential	58
5	Streuung von Teilchen	60
5.1	Wirkungsquerschnitt	60
5.2	Rutherford-Streuung	63
5.3	Differentieller Wirkungsquerschnitt im Laborsystem	65